Composition 1 : Corrigé

Exercice 1 (FGN Analyse 2 p115)

$$u_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}, \quad f(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x).$$

1) • Si $|x| < 1$, $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

et $|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$ et $\sum |x|^n$ série à terme ≥ 0 convergente

donc $\sum |u_n(x)|$ converge si $|x| < 1$.

et $\sum u_n(x)$ converge.

• Soit $0 < a < 1$, montrons la convergence uniforme sur $[-a, a]$.

Soit $x \in [-a, a]$,

on a : $1 - x^n \geq 1 - |x|^n$, d'où $\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leq \frac{|x|^n}{1-|x|^n}$

$$\leq \frac{a^n}{1-a^n}$$

car $x \longmapsto \frac{x}{1-x}$ est $\nearrow$ sur $[0, 1[$.

Par ce qui précède, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{1-a^n}$ converge

et $\sum u_n(x)$ converge normalement sur $[-a,a]$.
donc $f(x)$ est continue sur $[-a,a]$ et donc sur $]-1,1[$.
(La limite uniforme de fonctions continues est continue).

2) Soit $x \in]0,1[$ fixé.
et $\varphi : t \in (0,+\infty) \longrightarrow \dfrac{x^t}{1-x^t} = \dfrac{e^{t\ln x}}{1-e^{t\ln x}}$.
Un calcul donne $\varphi'(t) = \dfrac{e^{t\ln x}(\ln x)}{(1-e^{t\ln x})^2} < 0$ car $\ln x < 0$.

donc φ est $\searrow$.

et $$\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \varphi(t)\,dt \leq \frac{x^n}{1-x^n}$$

En sommant : $$\sum_{n=2}^{N+1} \frac{x^n}{1-x^n} \leq \int_1^{N+1} \varphi(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{1-x^n}$$

Or $$\int_1^A \varphi(u)\,du = \int_1^A \frac{e^{u\ln x}}{1-e^{u\ln x}}\,du \qquad (x \text{ fixé}).$$
$$= \frac{1}{\ln x}\left[-\ln\left(1-e^{u\ln x}\right)\right]_1^A$$
$$= \frac{\ln(1-x)}{\ln x} - \frac{\ln\left(1-e^{A\ln x}\right)}{\ln x}$$
$\nearrow 0$ ($\ln x < 0$)
$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\ln(1-x)}{\ln x}.$$

$N \to +\infty$ donne:

$$f(x) - \frac{x}{1-x} \le \frac{\ln(1-x)}{\ln x} \le f(x).$$

et

$$\frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{\ln(1-x)}{\ln x}} = \frac{x\ln x}{(1-x)\ln(1-x)} \xrightarrow[\text{quand } x\to 1^-]{} 0$$

Car pour x proche de 1, $x = 1-h$. ($x<1$, $h>0$)

et

$$\frac{(1-h)\ln(1-h)}{h\ln h} \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{-h}{h\ln h} = \frac{-1}{\ln h}.$$

donc

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{\ln x} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

3) On remarque que

$$\frac{x^n}{1-x^n} = x^n \sum_{k\ge 0} (x^n)^k = \sum_{k\ge 1} x^{nk}.$$

$$\sum_{n\ge 1}\sum_{k\ge 1} |x^{nk}| = \sum_{n\ge 1} \frac{|x|^n}{1-|x|^n} = f(|x|) < +\infty.$$

Donc pour $|x|<1$, on peut sommer suivant l'ordre que l'on veut et

$$f(x) = \sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n\ge 1}\sum_{k\ge 1} x^{nk} = \sum_{\ell\ge 1}\sum_{\substack{j=1\\ j\mid \ell}}^{\ell} x^{\ell}$$

$$= \sum_{\ell\ge 1} d(\ell)\, x^{\ell}.$$

Exercice 2 : (Gourdon p 277)

En faisant une transformation d'Abel, $\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m$.

⚠ On n'a pas nécessairement $\sum_{k=1}^{m} |u_k| < +\infty$

Par contre, on a sous les hypothèses,

$\sum_{k\geq 1} |A_k| \, |b_k - b_{k+1}| < +\infty$.

On peut également raisonner avec le reste.

Soit $q \geq p$.

$$\left| \sum_{k=p}^{q} u_n \right| = \left| \sum_{k=p}^{q-1} (A_k)(b_k - b_{k+1}) + A_q b_q \right|$$

$$\leq \sum_{k=p}^{q} \underbrace{\frac{|A_k|}{\sqrt{k}}}_{\leq M} \sqrt{k} \, |b_k - b_{k+1}| + \frac{A_q}{\sqrt{q}} \sqrt{q} \, b_q$$

$$\leq M \underbrace{\sum_{k=p}^{q} \sqrt{k} \, |b_k - b_{k+1}|}_{\xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0} + M \underbrace{\sqrt{q} \, b_q}_{\xrightarrow[q\to+\infty]{} 0}$$

car c'est le "reste" d'une série absolument convergente.

donc $\sum u_n$ est de Cauchy et converge.

2) a) Soit p impair.

$$\sum_{n=p^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} (-1)^p + \sum_{n=(p+1)^2}^{(p+2)^2-1} (-1)^{p+1}$$

$$= (-1)(2p+1) + (1)(2p+3) = 2.$$

b) Soit $N \geq 1$ et r le plus grand entier impair tel que $r^2 \leq N$

On a : $r^2 \leq N < (r+2)^2$.

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \sum_{n=1}^{r^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} + \sum_{n=r^2}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$$

D'après ce qu'on a fait en a)

- $$\sum_{n=1}^{r^2-1} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \left(\frac{r-1}{2}\right) \times 2 \leq r \leq \sqrt{N}.$$

Et $$\left|\sum_{n=r^2}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right| \leq (N - r^2 + 1) \leq 4r+3$$
$$\leq 4\sqrt{N} + 3 \leq 7\sqrt{N}.$$

donc $$\left|\sum_{n=1}^{N} (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right| \leq 8\sqrt{N}.$$

c) Les hypothèses sont donc satisfaites avec $a_n = (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$

$b_n = \frac{1}{n}$.

$\ast \; |A_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq C\sqrt{n}$

$\ast \; \sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\,|b_n - b_{n+1}| = \sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right) < +\infty$

car $\frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$ (et termes ≥ 0)

$\ast \; \sqrt{n}\, b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

3) Soit $z \neq 1$, $|z| = 1$. Montrons que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} z^n$ converge.

On va utiliser ici le critère d'Abel usuel

avec $a_n = z^n$ et $b_n = \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.

- On a $|A_n| = \left|e^{i\theta}\frac{1-e^{i\theta n}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$ si $z = e^{i\theta}$.

- $b_n \to 0$

- Et $\sum_{n\geq 1} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$.

⚠ $|b_n - b_{n+1}| = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} & \text{si } n \text{ n'est pas un carré} \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est un carré} \end{cases}$

donc : $\sum_{n=1}^{N} |b_n - b_{n+1}| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2+1}\right)$

Ces 2 séries convergent donc $\sum_{n\geq 1} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$.

Rq : La série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}\right)^n$ est donc semi-convergente (i.e convergente mais pas absolument convergente) en chaque point du cercle de convergence.

Exercice 3 : (Gourdon p 246)

1) On suppose que $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et que $\sum b_n = +\infty$

et que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \geq 0$, si $n \geq N$, $\left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| \leq \varepsilon$

soit encore $|a_n - \ell b_n| \leq \varepsilon b_n$

Soit $x \in [0, 1[$,

$$\left|\sum_{n\geq 0} a_n x^n - \ell\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right)\right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - \ell b_n| x^n + \sum_{n\geq N} |a_n - \ell b_n| x^n$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - \ell b_n| + \sum_{n\geq N} \varepsilon b_n x^n$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - \ell b_n| + \varepsilon\left(\sum_{n\geq 1} b_n x^n\right)$$

Or $\sum_{n\geq 0} b_n$ est une série divergente, $b_n \geq 0$

donc $\sum_{n\geq 0} b_n x^n \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$

En effet, soit $A > 0$, $\exists K \geq 0$, si $n \geq K$.

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \geq A$$

En particulier, $\liminf_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} b_n x^n \geq \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{K} b_n x^n = \sum_{n=0}^{K} b_n \geq A$

Ceci est vrai pour tout $A > 0$

donc $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} b_n x^n = +\infty$.

En particulier avec $A = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - \ell b_n|$,

il existe $\lambda \in]0,1[$, tel que si $\lambda \leq x < 1$

$$\sum_{n\geq 0} b_n x^n \geq \frac{A}{\varepsilon}.$$

D'où si $\lambda \leq x < 1$,

$$\left| \sum_{n\geq 0} a_n x^n - \ell \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n \right) \right| \leq 2\varepsilon \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n \right)$$

et $$\left| \frac{\sum_{n\geq 0} a_n x^n}{\sum_{n\geq 0} b_n x^n} - \ell \right| \leq 2\varepsilon.$$

D'où $$\frac{\sum_{n\geq 0} a_n x^n}{\sum_{n\geq 0} b_n x^n} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \ell.$$

2) On remarque que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$ pour $|x| < 1$.

Par produit de Cauchy de 2 séries entières de rayon de convergence égal à 1, on a pour $|x| < 1$.

$$\frac{1}{1-x} \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n \right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) x^n$$
$$= \sum_{n\geq 0} A_n x^n.$$

Par hypothèse $\frac{A_n}{B_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

(et on a bien $\sum A_n x^n$, $\sum B_n x^n$ de rayon de CV 1

et $\sum B_n = +\infty$.)

donc d'après 1)

$$\frac{\sum_{n\geq 0} A_n x^n}{\sum_{n\geq 0} B_n x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell .$$

Or $$\frac{\sum_{n\geq 0} A_n x^n}{\sum_{n\geq 0} B_n x^n} = \frac{\sum_{n\geq 0} a_n x^n}{\sum_{n\geq 0} b_n x^n}$$ d'après ce qui précède.

3) <u>Application</u> : Soit $a\in\mathbb{N}$, $a\geq 2$.

$\sum_{n\geq 0} x^{a^n}$ série entière de Rayon de convergence 1.

$= \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ avec $\begin{cases} a_k = 1 & \text{si } k = a^\ell \text{ avec } \ell \text{ entier} \\ a_k = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

donc $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln a} \right\rfloor$ (car $n \geq a^\ell = e^{\ell \ln a} \iff \ell \leq \frac{\ln n}{\ln a}$)

~~On~~ pose alors $b_0 = 0$

$b_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

On a $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \sim \ln n$ (série harmonique)

donc $$\frac{A_n}{B_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\ln a}.$$

D'où d'après 2),

$$\frac{\sum_{n\geq 0} a_n x^n}{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\ln a}$$

Or pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x).$$

et finalement, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} x^{a^n} \underset{x \to 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{\ln a}$.