2017/2018

Corrigé : Composition 3

Exercice 1 :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) On a $\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$.

d'où $|f(x,y)| \leq |xy| \leq \frac{1}{2}\, |x|^2+|y|^2 = \frac{1}{2}\, \|(x,y)\|_2^2$

donc $|f(x,y)| = o(x,y)$ pour (x,y) proche de $(0,0)$

Donc pour (h,k) proche de $(0,0)$

$$f(h,k) = \underset{f(0,0)}{\underset{\shortparallel}{0}} + 0\cdot(h,k) + o(h,k)$$

donc f est différentiable en $(0,0)$ et $Df_{(0)} = 0$.

2) Soit $y \in \mathbb{R}^*$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$

si elle existe correspond à la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}$$

On : $\dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \dfrac{\cancel{h}y\,\dfrac{h^2-y^2}{h^2+y^2}}{\cancel{h}}$ car $f(0,y)=0$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} -y.$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ existe et vaut $-y$.

De même : $\dfrac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \dfrac{x\cancel{k}\left(\dfrac{x^2-k^2}{x^2+k^2}\right)}{\cancel{k}}$

pour $x\neq 0$.

$$\xrightarrow[k\to 0]{} x.$$

• Rq : . pour $y=0$ $f(h,0)=0$ $\forall h$

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=-y$

. pour $x=0$, $f(0,k)=0$ $\forall k$

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0=x$.

3) $\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f(0,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} f(0,y)\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(-y) = -1$.

$\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\right) = 1$.

Donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$

D'après le théorème de Schwarz, f n'est pas 2 fois différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2 : Soit $f : U \subset E \to F$

et $a \in U$.

On pose $g(x) = f(x) - f(a) - L(x-a)$

f étant continue sur U et différentiable sur $U \setminus \{a\}$

g est continue sur U et différentiable sur $U \setminus \{a\}$

$g(a) = 0$

et pour $x \in U \setminus \{a\}$.

$Dg(x) = Df(x) - L$

(ou si $h \in E$, $Dg_{(x)} h = Df_{(x)} h - Lh$).

D'après l'hypothèse, $Df_x \to L$ dans $\mathcal{L}(E,F)$

Soit $\epsilon > 0$, $\exists\ r > 0$, si $\|x-a\| \leq r$

$\|Dg_{(x)}\| = \|Df_x - L\| \leq \epsilon$.

Donc d'après l'inégalité de la moyenne,

si $\|x-a\| \leq r$:

$\|g(x) - g(a)\| \leq \epsilon \|x-a\|$

d'où $g(a+h) = o(\|h\|)$

d'où $f(a+h) = f(a) + Lh + o(\|h\|)$

c'est-à-dire f est différentiable en a, de différentielle L.