Leçons: Applications des formules de Taylor.218 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications. 219.

Exercice 1. Soit $p \geq 2$, montrer que l'existence d'un développement limité à l'ordre p en un point x_0 n'implique pas l'existence de la dérivée p-ème en x_0.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$,

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq C^n.$$

Montrer que f est developpable en série entière en tout point de $\mathbb{R}$ (de rayon de convergence infini).

Exercice 3. Soit f une application dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$ et soit $l \leq 1$ un entier. Montrer que la suite suivante converge et calculer sa limite:

$$S_n = \sum_{k=1}^{ln} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 4. (Rouvière exo 35)

1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels défini par $u_n = f(n)$ pour $n \geq 1$ avec f une fonction croissante telle que $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

Montrer que la suite u_n est dense sur le cercle.

(Pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et k un entier ($k \geq f(1)$), on pourra considérer x_k le réel tel que $f(x_k) = \theta + 2k\pi$ et n_k sa partie entière.)

2) On considère les cas $u_n = \cos(a\sqrt{n})$, $u_n = \cos(a \ln n)$, $u_n = \cos(an)$, $a \in \mathbb{R}$. Dans quels cas a-t-on $Adh(u_n) = [-1, 1]$?

Exercice 5. Approximation d'une "intégrale d'Euler" pour x petit à l'aide de séries divergentes (Walter Appel, Mathématiques pour la physique).

On note pour $x > 0$.

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt.$$

1) Justifier que f est bien définie et que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

2) Montrer que

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$$

3) En déduire que,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, k! \, x^{k+1} + R_n(x)$$

avec

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^\infty \frac{t^n e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} dt.$$

4) On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \, k! \, x^{k+1}$. Montrer que $|f(x) - S_{n-1}(x)| \leq n! x^{n+1}$.

5) On pose $e_n(x) = k! \, x^{k+1}$. On pose $N = \left[\frac{1}{x}\right]$.

On suppose maintenant que $0 < x < 1$. Etudier la suite $e_n(x)$ et montrer qu'elle atteint son minimum pour $n = N$ et qu'il vaut $\frac{N!}{N^N + 1}$.

6) Donner la valeur de la meilleure approximation que l'on peut trouver par cette méthode de $f\left(\frac{1}{20}\right)$, $f\left(\frac{1}{50}\right)$. Donner un équivalent de la meilleure approximation obtenue par cette méthode de $f\left(\frac{1}{N}\right)$. (On rappelle la formule de Stirling $N! \simeq \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$.)

Exercice 6. (*e n'est pas algébrique d'ordre 2*). (Gourdon p103) Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas trois entiers non tous nuls tels que

$$ae^2 + be + c = 0.$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde. On considérer $f(x) = ae^x + ce^{-x}$. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée entre les points 0 et 1 donne:

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta_n),$$

pour un certain $\theta_n \in (0, 1)$. Or $f^{(k)}(0) = a + (-1)^k c \in \mathbb{Z}$. On montre donc facilement que $\frac{f^n(\theta_n)}{n} \in \mathbb{Z}$.

De plus on montre facilement que $|f^{(n)}(\theta_n)|$ est borné pour tout $n \geq 1$ (car $0 \leq \theta_n \leq 1$).

On en déduit que $f^{(n)}(\theta_n) = 0$ pour tout n suffisament grand. Puis que $a + c = 0$ et $a - c = 0$ en considérant les limites des sous-suites paires et impaires.

Exercice 7. *Inégalités de Kolmogorov* (Gourdon p83 ou FGN1 p274) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On note $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$.

On suppose que M_0 et M_2 sont finis. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. En écrivant la formule de Taylor Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$. Montrer que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

puis que

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Exercice 8. *thm de Borel* (Rouvière p350 et 346 ou Gourdon p280 et 77)

1) Montrer que la fonction:

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire l'existence d'une *"fonction plateau"* $\phi \geq 0$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 2. \end{cases}$$

3) Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite quelconque de réels. Montrer qu'il existe une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall k \geq 0,\ u^{(k)}(0) = a_k.$$

On pourra considérer

$$u(x) = \sum_{k\geq 0} \phi(\lambda_k x) a_k \frac{x^k}{k!}$$

avec ϕ la fonction plateau précédente et où chaque λ_k sera convenablement choisi.

4) En déduire qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 9. formule d'Euler Mac-Laurin (Demailly p 85-88, Gourdon p 301)

1) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes (appelés polynômes de Bernoulli) vérifiant

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_n' = nB_{n-1}, n \geq 1 \\ \int_0^1 B_n(x)dx. \end{cases}$$

On a $B_1 = x - 1/2$. Montrer que pour $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$. On pose $b_n = B_n(0)$ (nombre de Bernoulli).

On pose $C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$. Montrer que C_n vérife les 3 conditions précédentes. En déduire que $b_{2k+1} = 0$ pour $k \geq 1$.

On note $\tilde{B}_n(x)$ la fonction 1 périodique égale à B_n pour $x \in [0, 1[$.

2) Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, en faisant des intégrations par parties successives montrer que

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \frac{f(k)}{2} + \frac{f(k+1)}{2} + \sum_{j=2}^{r} (-1)^{j-1} \frac{b_j}{j!} \left(f^{(j-1)}(k+1) - f^{(j-1)}(k) \right) + (-1)^r \int_k^{k+1} f^{(r)}(x) \frac{\tilde{B}_r(x)}{r!} dx$$

3) Soit $m \leq n$ 2 entiers. Montrer que

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)dx + \frac{f(m)}{2} + \frac{f(n)}{2} + \sum_{j=2}^{r} \frac{b_{2j}}{2j!} \left(f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(m) \right) + \int_m^n f^{(2r+1)}(x) \frac{\tilde{B}_{2r+1}(x)}{(2r+1)!} dx$$

4) En déduire la valeur de la série $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

5) En déduire un développement asymptotique de la série harmonique $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 10. Soient $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ des fonctions continues. On considère l'équation differentielle:

$$(E) y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Soit y une solution de (E) non identiquement nulle. Montrer que les zéros de y sont isolés.

Extremums

Exercice 11. (principe du maximum faible) (Gourdon, Rouvière, ZQ pour le cas de coefficients dépendant de x)

Soit Ω un ouvert borné. On note $\bar{\Omega}$ sa fermeture et $\partial\Omega = \bar{\Omega} - \Omega$. On considère l'opérateur de diffusion

$$L = \sum_{i,j} a_{i,j}\partial_{i,j} + \sum_i b_i \partial_i$$

avec $(a_{i,j})_{i,j}$ une matrice symétrique positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. (Rq: Si $(a_{i,j})_{i,j} = Id$ et $b = 0$, on a $L = \Delta$.)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$.

1) Montrer que f atteint son maximum.

2) On suppose que pour tout $x \in \Omega$, $Lf(x) > 0$. Montrer que f ne peut pas atteindre son maximum en un point $x_0 \in \Omega$. (On montrera que si A, B sont deux matrices symétriques ≥ 0 alors $tr(AB) \geq 0$.)

3) On suppose maintenant que pour tout $x \in \Omega$, $Lf(x) \geq 0$. Montrer que

$$\sup_{x\in\Omega} f(x) \leq \max_{x\in\partial\Omega} f(x).$$

On pourra considérer $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x\|^2$ avec $\varepsilon > 0$.

Exercice 12. (Théorème de Darboux par optimisation)

1) Proposer un exemple de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas continue. *Indication*: On pourra penser à $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$.

2) Montrer qu'une dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires:

Indication: On pourra suposer que pour $a < b$, on a $f'(a) < f'(b)$ et fixer $f'(a) < k < f'(b)$ et considérer la fonction $g(x) = f(x) - kx$, et montrer qu'elle atteint son minimum et que ce ne peut être ni en a ni en b.

Exercice 13. (Optimisation dans un Hilbert) (Ciarlet p 176)

1) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue coercive , c'est-à-dire telle que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f atteint son mimimum.

2) Soit $f : l^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie pour $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^2(\mathbb{R})$

$$f(x) = (\|x\| - 1)^2 + \sum_{n\geq 1} \frac{x_n^2}{n}.$$

Montrer que f est continue coercive mais que f n'atteint pas son infimum.

(On pourra considérer pour $k \geq 1$ les suites δ^k définies par $\delta^k_n = \delta_{k,n}$).

3) Soit H un espace de Hilbert (séparable) et $J : H \to \mathbb{R}$ une application continue coercive et convexe. Alors J atteint son minimum.

a) Soit $(x_k)_k$ une suite minimisante. Montrer que (x_k) est bornée.

b) Montrer qu'on peut en extraire une sous suite convergeant faiblement vers un élément $x^* \in H$.

(Ceci peut se faire avec le théorème de Banach-Alaoglu ou directement par extraction diagonale dans le cas d'un Hilbert séparable).

c) Soit $\beta > \inf_H J$. On considère le convexe fermé non-vide $C_\beta = \{x \in H, J(x) \leq \beta\}$. En utilisant la projection p sur C_β, montrer que pour k suffisammemt grand,

$$\langle x_k - p(x^*), x^* - p(x^*)\rangle \leq 0$$

et que donc, $x^* = p(x^*)$. Conclure.

Exercice 14. (distance à un fermé)

1) Montrer que pour E est un espace métrique (et même normé) de dimension infinie: si si x est un point de E st si F est un fermé de E , la distance $d(x, F)$ n'est pas forcément atteinte.

Indication: On pourra considérer $E = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $F = \{a^k, k \geq 0\}$ avec $a^k_n = \delta_k(n), n \geq 0$ et $x = 0$.

2) Montrer que cette distance à un fermé $d(x, F)$ est atteinte en dimension finie.

Exercice 15. 1) Construire deux fermés F, G de $\mathbb{R}^2$ tels que $d(F, G) = 0$ mais tels que $F \cap G = \emptyset$.

(On pourra considérer la droite $y = 0$ et l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$).

2) Montrer que si K et G sont compacts, la distance $d(K, G)$ est atteinte.

Exercice 16. (Lax-Milgram) (Brézis p82) Soit H un espace de Hilbert et $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive (i.e. vérifiant $a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$ pour un certain $\alpha > 0$ et tout $u \in H$.

Soit $\phi \in H'$, par le théorème de représentation de Riesz, il existe $f \in H$ tel que $\phi(v) =< f, v >$.

On suppose d'abord que a est symétrique. Montrer que

$$\exists! u \in H,\ \forall v \in H,\ a(u, v) =< f, v > . \tag{1}$$

Montrer de plus que cet unique u est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2}a(u, u) - < f, u >= \min_{v \in H}\left\{\frac{1}{2}a(v, v) - < f, v >\right\}$$

Montrer que la propriété (1) est encore satisfaite si a n'est pas supposée symétrique.

Exercice 17. (Stampacchia) (Brézis p84) Soit H un espace de Hilbert et $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive

Soit K un convexe fermé et non vide.

Soit $f \in H$.

On suppose d'abord que a est symétrique. Montrer que

$$\exists! u \in H, \forall v \in K, \ a(u, v - u) \geq < f, v - u > . \tag{2}$$

Montrer de plus que cet unique u est caractérisé par la prorpiété

$$\frac{1}{2} a(u, u) - < f, u > = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - < f, v > \right\}$$

Montrer que la propriété (2) est encore satisfaite si a n'est pas supposée symétrique.

Exercice 18. Autres pistes: algorithme du gradient (à pas optimal), ellipsoïde de John, Lemme de Schwarz, Calcul des variations,...