Espaces complets.

Exercice 1. (La complétude est une propriété métrique). Donner une distance sur $\mathbb{R}$ définissant la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ mais pour laquelle $\mathbb{R}$ n'est pas complet.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy.

Montrer que $(x_n)_n$ est convergente si et seulement $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique complet et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de X.

1) Montrer que si $\sum_{n\geq 0} d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$, alors $(x_n)_n$ est de Cauchy.

2) La réciproque est-elle vraie?

3) Montrer que si $(x_n)_n$ est de Cauchy, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que $\sum_{n\geq 0} d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < +\infty$.

Exercice 4. 1) Montrer que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_1$ n'est pas complet.

Exercice 5. 1) Montrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$ n'est pas complet.

2) Montrer que $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est complet.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. On considère $\mathcal{L}_c(E, F)$ muni de la norme $\|u\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$.

Montrer que $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach.

Exercice 7. Soit E un espace de Banach et u un endomorphisme continu de E .

1) On suppose que u est de norme < 1. Montrer que $Id - u$ est inversible (et donner son inverse son la forme d'une série).

2) Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{u^k}{k!}$ définit un endomorphisme de E appelé $\exp(u)$.

Exercice 8. (Théorème de représentation de Riesz) Soit H un espace de Hilbert, montrer que pour toute forme linéaire conitnue l sur H, il existe un vecteur y (unique) tel que $l = \langle y, \cdot \rangle$; i.e.

$$\forall x \in H, l(x) = \langle y, x \rangle.$$

Indication: On pourra considérer la fonction ϕ définie sur H par

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - l(x).$$

On montrera que ϕ est continue minorée, puis qu'elle atteint son minimum.

Pour cela, on considérera une suite minimisante (x_n) (telle que $\phi(x_n)$ décroit) et en utilisant l'inégalité du parallélogramme, on montrera qu'elle est de Cauchy.

Exercice 9. (point fixe) Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel normé et f une application de K dans K telle que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

Montrer que f admet un point fixe (pas forcément unique).

emphIndication: On fixera $a \in K$ et on considérera

$$f_n(x) = f\left(\frac{1}{n}a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x\right).$$

Exercice 10. (théorème des fermés emboîtés) Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés, bornés don le diamètre tend vers 0.

Montrer que $\cap_n F_n$ est non vide (et constitué d'un seul point).

Exercice 11. (Baire) Soit (X, d) un espace métrique complet. Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts dense est dense.