Corrigé : DS Analyse : Convergence et dualité M1

Exercice 1 : Soient $1 \leq p < q < +\infty$.

(1) On a $L^q([0,1]) \subset L^p([0,1])$

En effet, prenons $f \in L^q([0,1])$ et montrons que $f \in L^p([0,1])$.

On a : $\displaystyle\int_0^1 |f|^p \, dx \leq \left(\int_0^1 |f|^q \, dx\right)^{p/q} \left(\int_0^1 1^\beta \, dx\right)^{\frac{1}{\beta}}$

par Holder avec $\alpha = \frac{q}{p} > 1$ et $\beta = \frac{q}{q-p} > 1$

$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right) \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$

d'où $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p \, dx\right)^{1/p} \leq \|f\|_q < +\infty$

donc $f \in L^p([0,1])$.

- L'inclusion est stricte.

Prenons $f(x) = x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$ si $x \in (0,1]$.

· $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^p \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha p}} \, dx < +\infty$ si $\alpha p < 1$

· $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^q \, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha q}} = +\infty$ si $\alpha q \geq 1$

Or $q > p$ donc $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$.

Donc si $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$, $f \in L^p([0,1])$

mais $f \notin L^q([0,1])$

(2) On a $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$ $(p<q)$

En effet prenons $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p(\mathbb{N})$

et montrons que $x \in \ell^q(\mathbb{N})$.

On a $\|x\|_p < +\infty$ et pour tout n, $\frac{|x_n|}{\|x\|_p} \leq 1$

d'où car $p<q$, $\left(\frac{|x_n|}{\|x\|_p}\right)^q \leq \left(\frac{|x_n|}{\|x\|_p}\right)^p$

Et en sommant : $\sum_{n\geq 0} |x_n|^q \leq \|x\|_p^{q-p} \sum_{n\geq 0} |x_n|^p$

c'est-à-dire $\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^{q-p} \|x\|_p^p = \|x\|_p^q$.

$< +\infty$

d'où $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ et $x = (x_n) \in \ell^q(\mathbb{N})$.

- Prenons $x_0 = 0$ et $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 1$ et $x = (x_n)_{n\geq 0}$

$\sum_{n\geq 0} |x_n|^p = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{p\alpha}} = +\infty$ si $p\alpha \leq 1$.

$\sum_{n\geq 0} |x_n|^q = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{q\alpha}} < +\infty$ si $q\alpha > 1$.

Or $p<q$ donc $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$.

Donc si $\frac{1}{q} < \alpha \leq \frac{1}{p}$, $x \in \ell^q(\mathbb{N})$

mais $x \notin \ell^p(\mathbb{N})$.

(2)

(3) Soit $p \geq 1$, montrons que $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Pour cela prenons $f \in L^p(\mathbb{R})$ et montrons que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Si $p > 1$.

Soit $R > 0$, montrons que $\int_{-R}^{R} |f(t)|\,dt < +\infty$.

Par Holder, avec $q = \frac{p}{p-1} \in]1; +\infty]$,

on a : $\int_{-R}^{R} |f(t)|\,dt \leq \left(\int_{-R}^{R} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_{-R}^{R} 1^q\right)^{1/q}$

$$\leq \|f\|_p^{1/p} (2R)^{1/q} < +\infty.$$

donc $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Pour $p = 1$, on a directement $\int_{-R}^{R} |f(t)|\,dt \leq \|f\|_1 < +\infty$.
et le résultat est clair.

(4) Soit $\alpha > 0$,

On a $\int_{\mathbb{R}^d} |\delta_\alpha f(t)|^p\,dt$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(\alpha t)|^p\,dt$$

en faisant le changement de variable $s = \alpha t$ dans $\mathbb{R}^d$, $\iff t = \frac{1}{\alpha} s$ "$dt = \frac{1}{\alpha^d} ds$"

$$= \frac{1}{\alpha^d} \int_{\mathbb{R}} |f(s)|^p\,ds$$

d'où $\|\delta_\alpha f\|_p = \frac{1}{\alpha^{d/p}} \|f\|_p$.

Exercice 2 : Soit $1 \leq p, q < +\infty$ et T linéaire continue de $L^p(\mathbb{R}) \to L^q(\mathbb{R})$ tel que pour tout $a>0$ et tout $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$T(\delta_a f) = a^\alpha \delta_{1/a} Tf .$$

1) Soit f telle que $Tf \neq 0$ dans $L^q(\mathbb{R})$.

On a : pour tout $a>0$.

$$\| T(\delta_a f) \|_q \leq C \| \delta_a f \|_p$$

avec $C = \|T\|_{p \to q} > 0$

Or
$$\| T(\delta_a f) \|_q = \| a^\alpha \delta_{1/a} Tf \|_q$$
$$= a^\alpha \| \delta_{1/a} Tf \|_q$$
$$= a^\alpha a^{\frac{1}{q}} \| Tf \|_q$$

et
$$\| \delta_a f \|_p = a^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p$$

d'où pour tout $a>0$,

$$a^{\alpha + \frac{1}{q} + \frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\|Tf\|_q} C \|f\|_p < +\infty$$

Ceci n'est possible que $\alpha + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0$.

2) Soit $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$

f est bornée sur un compact, donc f appartient à tous les $L^p(\mathbb{R})$ $1 \leq p \leq +\infty$.

$f \in L^1(\mathbb{R})$ donc on peut calculer sa transformée de Fourier par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi x.\xi}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-2i\pi x.\xi}\, dx = \left[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi}\right]_{-1}^{1} \text{ pour } \xi \neq 0$$

$$= \frac{e^{2i\pi\xi} - e^{-2i\pi\xi}}{(2i)\pi\xi} = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}$$

et $\hat{f}(0) = 2$.

On a $|\hat{f}(\xi)| = 2\,|\mathrm{sinc}(2\pi\xi)|$

$$\leq 2\min\left(1, \frac{1}{|2\pi\xi|}\right)$$

d'où si $q > 1$, $|\hat{f}(\xi)|^q \leq 2^q \min\left(1, \frac{1}{|2\pi\xi|^q}\right)$ intégrable sur $\mathbb{R}$,

donc $\hat{f} \in L^q(\mathbb{R})$.

• $$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \sum_{n \geq 1} \left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|\, dx\right) \times \frac{1}{(n+1)\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} |\sin(x)|\, dx}_{>0} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+1} = +\infty$$

donc $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

(3) Soit $a > 0$, et $f_a = \mathbb{1}_{[-a,a]}$

Par calcul direct, on trouve $\hat{f}_a(\xi) = \dfrac{\sin(2\pi a \xi)}{\pi \xi}$ si $\xi = 0$

$$\hat{f}_a(0) = 2a$$

On remarque que $f_a = \delta_{1/a} f$

et que $\hat{f}_a(\xi) = a\, \hat{f}(a\xi)$

$= a\, \delta_a(\hat{f})(\xi)$

(4) On ~~note~~ $g = f * f$.

g appartient à tout $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \geq 1$.

en effet f est aussi dans tous les $L^p(\mathbb{R})$

donc pour $p \geq 1$, fixé $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$

d'où par l'inégalité de Young $g = f * f \in L^p(\mathbb{R})$.

On a $\hat{g}(\xi) = \widehat{f * f}(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \hat{f}(\xi)$

$= 4 \,\mathrm{sinc}^2(2\pi \xi)$

d'où $|\hat{g}(\xi)|^q \leq 4 \min\left(1, \dfrac{1}{|2\pi \xi|^{2q}}\right)$

intégrable pour tout $q > \frac{1}{2}$

donc $\hat{g} \in L^q(\mathbb{R})$ pour tout $q \geq 1$.

(5) ⓐ On suppose qu'il existe $C>0$ telle que pour tout $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d) \neq 0$. $\hat{g} \neq 0$ par injectivité de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.

Soit $a>0$, on a :

$$\widehat{(\delta_a g)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (\delta_a g)(x)\, e^{-2i\pi x \xi}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(ax)\, e^{-2i\pi x \xi}\, dx$$

$$= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} g(y)\, e^{-2i\pi \frac{y}{a} \xi}\, dy$$

$(y = ax) \Leftrightarrow (x = \frac{1}{a} y)$

$dx = \frac{1}{a} dy$

$$= \frac{1}{a} \hat{g}\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{1}{a} \left(\delta_{\frac{1}{a}}(\hat{g})\right)(\xi)$$

En appliquant le même calcul que pour le point (2) avec $\alpha = -1$, on trouve que $-1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0$

c'est-à-dire que nécessairement $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5) Supposons qu'il existe $C>0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$

$$\|\hat{\varphi}\|_{\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

Notons $E = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$

La transformée de Fourier est alors une application linéaire continue de $(E, \| \|_p)$ dans $(\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d), \| \|_q)$

L'espace E qui contient par exemple $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\| \|_p$.

Par le théorème de prolongement des applications linéaires continues, la transformée de Fourier se prolongerait alors en un opérateur linéaire continu de $(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d), \| \|_p)$ dans $(\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d), \| \|_q)$.

Exercice 3 :

(1) Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $r > 0$.

On a $\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |f(x+y)|\, dy \leq \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \|f\|_\infty \, dy$

$= \frac{1}{2r} . 2r \, \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

D'où en passant au sup,

$|M(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

et $\|M(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

(2) Soit $r > 0$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \tau_\lambda f(x) = f(x-\lambda)$

$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |\tau_\lambda f(x+y)|\, dy = \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} f((x-\lambda)+y)\, dy$

d'où en passant au sup :

$M(\tau_\lambda f)(x) = M(f)(x-\lambda)$

$= \tau_\lambda (M(f))(x)$

De même pour $r > 0$ et $\alpha > 0$ et $S_\alpha f(x) = f(\alpha x)$

$\frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |(S_\alpha f)(x+y)|\, dy$

$= \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |f(\alpha x + \alpha y)|\, dy$

Avec le changement de variable $z = \alpha y \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha} z$

$$\frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} |f(\alpha x + \alpha y)|\, dy = \frac{1}{2(\alpha R)} \int_{-\alpha R}^{\alpha R} |f(\alpha x + z)|\, dz.$$

D'où en passant au sup :

$$\sup_{R>0} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} |(\delta_\alpha f)(x+y)|\, dy = \sup_{R>0} \frac{1}{2\alpha R} \int_{-\alpha R}^{\alpha R} |f(\alpha x + z)|\, dz$$

$$= \sup_{R'>0} \frac{1}{2R'} \int_{-R'}^{R'} |f(\alpha x + z)|\, dz.$$

(posé $R' = \alpha R$)

d'où $M(\delta_\alpha f)(x) = M(f)(\alpha x)$

$= \delta_\alpha(M(f))(x)$

*) Supposons maintenant que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$

$$\|M(f)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

et regardons l'action des dilatations.

Soit $a > 0$ et $f \neq 0 \in L^p$, on a alors $M(f) \neq 0$

et regardons $\delta_a f$.

On aurait $\|M(\delta_a f)\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C \|(\delta_a f)\|_{L^p(\mathbb{R})}$

Or $\| H(\delta_a f)\|_{L^q(\mathbb{R})} = \|\delta_a (Hf)\|_{L^q(\mathbb{R})}$

$$= \frac{1}{a^{\frac{1}{q}}} \|Hf\|_{L^q(\mathbb{R})} \neq 0.$$

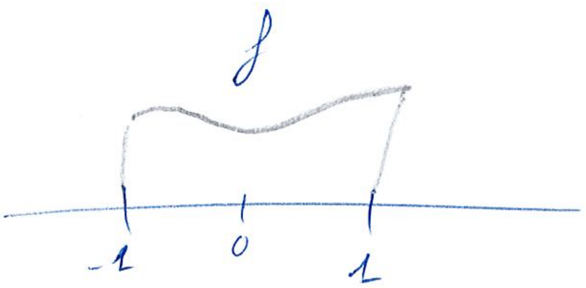
et $\|\delta_a f\|_p = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$

d'où pour tout $a > 0$,

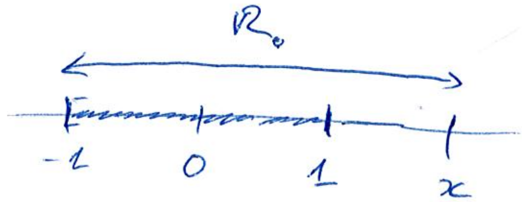
$$a^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq \frac{C \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}}{\|Hf\|_{L^q(\mathbb{R})}}$$

La seule possibilité est donc d'avoir $p = q$.

(3) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support dans $[-1, 1]$.



soit $|x| \geq 1$,



et prenons $R_0 = 1 + |x|$.

Alors $\dfrac{1}{2R_0} \displaystyle\int_{-R_0}^{R_0} |f(x+y)|\, dy = \dfrac{1}{2(1+|x|)} \int_{x-R_0}^{x+R_0} |f(z)|\, dz$

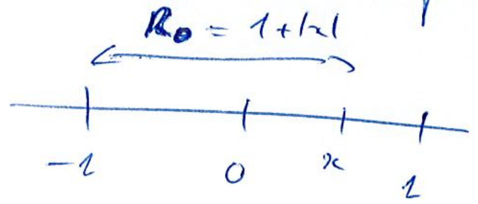
$(z = x+y)$

Or $[x - R_0, x + R_0] \supset [-1, 1] = \operatorname{supp}(f)$

d'où $\dfrac{1}{2R_0} \displaystyle\int_{-R_0}^{R_0} |f(x+y)|\,dy = \dfrac{\|f\|_1}{2(1+|x|)}$

et $M(f)(x) \geq \dfrac{\|f\|_1}{2(1+|x|)}$.

- De manière similaire pour $|x| \leq 1$



pour $R_0 = 1+|x|$, $\dfrac{1}{2R_0} \displaystyle\int_{-R_0}^{R} |f(x+y)|\,dy = \dfrac{\|f\|_1}{2(1+|x|)}$.

et $M(f)(x) \geq \dfrac{\|f\|_1}{2(1+|x|)}$.

Prenons maintenant, $f \neq 0$ à support dans $[-1, 1]$
$f \in L^1(\mathbb{R})$

par exemple $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$.

on a $Mf(x) \geq \dfrac{\|f\|_1}{2(1+|x|)}$

d'où en intégrant $\displaystyle\int_{x\in\mathbb{R}} |M(f)(x)|\,dx \geq \frac{\|f\|_1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|}\,dx$
$= +\infty$

donc $M(f) \notin L^1(\mathbb{R})$.

~~Et~~ (0.2) n'est pas satisfaite pour $p=q=1$.

(4) (a) Soit $K(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+|x|)^2} dx$

On a $K \geq 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[-\frac{1}{(1+x)} \right]_0^{+\infty} = 1$$

d'où $\int_{\mathbb{R}} K(x)\, dx = 1$ (et $K \in L^1(\mathbb{R})$).

Donc $K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une identité approchée lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. $(\varepsilon > 0)$.

Donc si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $K * f \in L^p(\mathbb{R})$ (par Young)

et $K * f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^p} f$.

(b) On pose $\mathcal{M}(f)(x) = \sup\limits_{\varepsilon > 0} K_\varepsilon * |f|$.

Montrons que $\mathcal{M}(f)(x) \leq C\, M(f)(x)$

pour une certaine constante $C > 0$

pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

On a $\mathcal{M}[f](x) = \tau_{-x}\mathcal{M}[f](0)$
$= \mathcal{M}[\tau_{-x} f](0)$

et $M[f](x) = M[\tau_{-x} f](0)$

et $\tau_{-x} f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

donc il suffit de vérifier que : $\mathcal{M}[f](0) \leq C M(f)(0)$
pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

On pose $g(t) = |f(t)| + |f(-t)|$ et $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$

$$G(x) = \int_{-x}^{x} |f(u)|\,du$$

$$= 2x \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} |f(u)|\,du \leq 2x\, M[f](0)$$

Maintenant :

$$K_\varepsilon * |f|(0) = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, K_\varepsilon(-t)\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{1+\left(\frac{|t|}{\varepsilon}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} |f(t)| + |f(-t)| \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{1+\left(\frac{|t|}{\varepsilon}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} g(t) \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{1+\left(\frac{|t|}{\varepsilon}\right)^2}\,dt$$

d'où $K_\varepsilon * |\varphi|(0)$

$$\underset{IPP}{=} \underbrace{\Big[G(t)\ K_\varepsilon(t) \Big]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} G(t)\ K_\varepsilon'(t)\, dt$$

$=0$ car $G(0)=0$

$|G(t)| \leq 2t\ M(\varphi)(0)$

et $K_\varepsilon(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varepsilon}{t^2}$

et $K_\varepsilon'(t) = \dfrac{1}{\varepsilon^2} K'\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right)$ $\quad t \geq 0$

$$= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\left(1+\frac{t}{\varepsilon}\right)^3}$$

d'où $K_\varepsilon * |\varphi|(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{G(t)}_{\leq 2t M(\varphi)(0)} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\left(1+\frac{t}{\varepsilon}\right)^3} dt$

$$\leq M(\varphi)(0) \int_0^{+\infty} 2t\ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\left(1+\frac{t}{\varepsilon}\right)^3} dt$$

Or cette dernière intégrale ne dépend pas de ε.
En effet elle vaut :

$$-\int_0^{+\infty} \frac{2t}{\varepsilon} K'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \frac{dt}{\varepsilon} = -\int_0^{+\infty} 2s\ K'(s)\, ds$$

$$\underset{s=\frac{t}{\varepsilon}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2s}{(1+s)^3} ds < +\infty$$

Donc avec $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2s}{(1+s)^3} ds$

On a bien $\mathcal{M}(\varphi)(x) \leq C\ M(\varphi)(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.