Corrigé Test 2

Ex I :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ex II : 1) On effectue les mêmes opérations élémentaires sur les lignes de A et de I

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ +2 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$ $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{4}\\2&-1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{4}\\2&-1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Donc A est inversible d'inverse $\begin{pmatrix}-1&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{4}\\2&-1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

. B n'est pas une matrice carrée
donc B n'est pas inversible.

. D'après le cours, $C = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ est inversible
si et seulement si $ad-bc \neq 0$
et alors $C^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

donc C est inversible d'inverse $C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}$

Pour $A \in \mathcal{M}_{k,m}(\mathbb{R})$
- Le rang de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A.
  Un théorème dit que c'est aussi la dimension de celui engendré par les lignes
- $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_m)$ avec $C_1 \dots C_m \in \mathbb{R}^k$ les colonnes de A.
- $\mathrm{Ker}\, A = \{x \in \mathbb{R}^m,\ Ax = 0\}$

2) voir cours.

3) $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible donc $\mathrm{rang}(A) = 3$.

et 4) donc $\dim \mathrm{Im}(A) = \mathrm{rang}\, A = 3$

$\dim \mathrm{Ker}(A) = 3 - 3 = 0$

donc $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^3$

$\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

De même : C inversible

donc $\operatorname{rang}(C) = 2$ $\qquad$ $\dim \operatorname{Im}(C) = 2$

$\dim \operatorname{Ker}(C) = 0$

et $\operatorname{Im} C = \mathbb{R}^2$

$\operatorname{Ker} C = \{0\}$.

- $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

B a même rang que

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\operatorname{rang}(B) = 2 = \dim \operatorname{Im}(B)$

et $\dim \operatorname{Ker}(B) = 4 - \dim \operatorname{Im}(B) = 2$.

Calculons $\operatorname{Ker} B$:

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y - z + w = 0 \\ 2x + 5y - 3z + w = 0 \\ x + 4y - 3z - w = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + w = 0 \\ \quad\;\; y - z - w = 0 \end{cases}$$ (système échelonné)

en faisant les mêmes opérations sur les lignes que précédemment

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -z - 3w \\ y = z + w \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z,w) \in \mathrm{Vect}\big((-1, 1, 1, 0), (-3, 1, 0, 1)\big)$$

- $\mathrm{Im}\, B = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Les matrices suivantes ont même image que B

$$\begin{array}{cccc} & C_2 - 4C_1 & C_3 + 3C_1 & C_4 + C_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & +2 & 0 & 0 \\ 2 & +3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\mathrm{Im}\, B = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Exo III

1) Toutes les colonnes de J sont les mêmes donc

$\text{rang}(J) = 1$.

2) $J^2 = n J$

3) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad (Id + aJ)(Id + bJ)$

$$= Id + (a+b)J + ab\,J^2$$

$$= Id + (a+b+nab)\,J$$

4) Soit $a \neq -\frac{1}{n}$.

$a + b + nab = 0$

$\Leftrightarrow \quad (1+na)\,b = -a$

$\Leftrightarrow \quad b = \dfrac{-a}{1+na} \qquad 1+na \neq 0.$

donc $(Id + aJ)\left(Id - \left(\dfrac{a}{1+na}\right)J\right) = Id$.

donc $(Id + aJ)$ est inversible d'inverse $Id - \dfrac{a}{1+na} J$.

5) Si $a = -\frac{1}{n}$, la somme des lignes fait 0

donc $\left(Id - \frac{1}{n}J\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker\left(Id - \frac{1}{n}J\right)$ et $\left(Id - \frac{1}{n}J\right)$ n'est pas inversible