CPP - la prépa des INP (1 ème année). Bordeaux, 10/03/2014.

Probabilités discrètes: DS 2.

durée 1h- la calculatrice Casio collège est autorisée.
On justifiera proprement tous les calculs.
Le barême est indicatif.

EXERCICE 1. (4 points) On effectue 3 tirages avec remise dans une urne composée de 5 boules numérotées de 1 à 5.

1) Calculer la probabilité que toutes les boules tirées aient un numéro pair.
2) Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule portant un numéro pair.

EXERCICE 2. (2 points) Dans un jeu de 52 cartes, on tire au hasard 5 cartes sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir un carré (c'est-à-dire d'avoir les 4 cartes d'une même valeur (As, Roi, ...) et une cinquième carte d'une valeur forcément différente).

EXERCICE 3. (7 points) Soient X et Y deux variables aléatoires telles que la loi du couple (X,Y) est donnée par le tableau suivant:

$X\backslash Y$	0	1	2	3
1	$\mathbf{0,1}$	$0,2$	$0,1$	$0,1$
2	$0,1$	0	0	$0,1$
3	$0,1$	0	$0,1$	$0,1$

Pour lire le tableau, on a par exemple $\mathbb{P}(\{X=2\}\cap\{Y=0\}) = \mathbf{0,1}$.

1) Ecrire l'évènement $X=Y$ à l'aide des évènements $\{X=i\}\cap\{Y=j\}$, puis calculer la probabilité $\mathbb{P}(\{X=Y\})$.
2) Déterminer la loi de X puis calculer l'espérance et la variance de X.
3) Calculer l'espérance et la variance de X.
4) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
5) Calculer $\mathbb{P}(Y=i|X=3)$ pour $i=0,1,2,3$.

EXERCICE 4. (4 points) Un vin Chilien et un Pessac-Léognan sont servis à cinq goûteurs "à l'aveugle", Un vin donné est choisi avec probabilité $1/2$ et le même vin est servi aux cinq goûteurs. On suppose que les réponses des goûteurs sont indépendantes et que chaque goûteur reconnaît bien le vin servi avec probabilité $3/4$.

1) Sachant que les 5 goûteurs ont trouvé que le vin était un Bordeaux, quelle est la probabilité que ce soit le vin Chilien qui ait été servi.
2) On suppose maintenant que seulement 3 goûteurs sur 5 ont trouvé que le vin était un Bordeaux, quelle est la probabilité que ce soit le vin Chilien qui ait été servi.

EXERCICE 5. (2 points) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note $m=\mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$. On note: $S_n = X_1+\cdots+X_n$. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire suivante:

$$Y_n := \left(\frac{S_n}{n} - m\right).$$