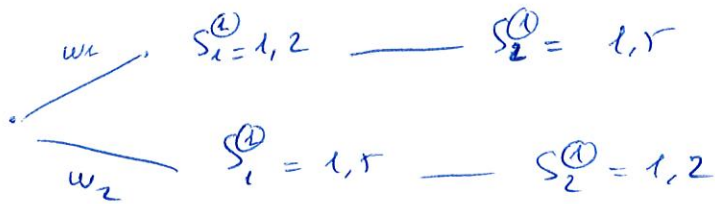


Exercice 7: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ (2 états)

• $(S_n^{\odot})_{0 \leq n \leq 2}$ ne dépend pas de ω donc est un actif non risqué.



On a: $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\tilde{\mathcal{F}}_1 = \sigma(S_1^{(1)}) = \sigma(\{\omega_1\}, \{\omega_2\}) = \mathcal{P}(\Omega)$

$\tilde{\mathcal{F}}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$

• Une stratégie est prévisible si ϕ_n ($n=0,1$) est mesurable par rapport à $\tilde{\mathcal{F}}_n$.

Ici il suffit donc que ϕ_1 (la manière dont on constitue le portefeuille au temps 0) soit $\tilde{\mathcal{F}}_0$ -adaptée c'est-à-dire déterministe.

La stratégie (d) n'est donc pas prévisible $\phi_1(\omega_1) \neq \phi_1(\omega_2)$

• Elle est auto-financée si ici pour tout ω

$$V_2(\phi) = V_1(\phi)$$

$$\phi_1 \cdot S_2 \quad \phi_2 \cdot S_1$$

$$\phi_1^{(0)} S_1^{(0)} + \phi_1^{(1)} S_1^{(1)}$$

$$\phi_2^{(0)} S_1^{(0)} + \phi_2^{(1)} S_1^{(1)}$$

↑
valeur du portefeuille obtenue au temps 1

↑
partition du portefeuille entre les instants 1 et 2.

stratégie c: $\phi_1^{\text{①}} = -1, \phi_1^{\text{②}} = 2$ $V_0(\phi) = +\phi_1^{\text{①}} S_1^{\text{①}} + \phi_1^{\text{②}} S_1^{\text{②}}$

$$= -1 \times 1 + 2 \times 2$$

$$= 1$$

$V_1(\phi)(\omega) = \phi_1^{\text{①}} S_1^{\text{①}} + \phi_1^{\text{②}} S_1^{\text{②}}$

$$= \begin{cases} -1 \times 1,1 + 2 \times 1,2 = 1,3 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ -1 \times 1,1 + 2 \times 1,5 = 1,9 & \text{si } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

$V_{1+}(\phi)(\omega) = \phi_2^{\text{①}} S_1^{\text{①}} + \phi_2^{\text{②}} S_1^{\text{②}}$

$$\begin{cases} = -1 \times 1,1 + 1 \times 1,2 = 0,1 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ = -1 \times 1,1 + 1 \times 1,5 = 0,4 & \text{si } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

La stratégie n'est pas auto-financée
 Dans les 2 cas, il y a eu retrait d'argent.

(elle est réalisable et positive).
 (calculer $V_2(\phi)$)

La stratégie doit aussi être positive (pour tout état).
 de valeur globale

② stratégie c.

$V_0(\phi) = 0$

$V_1(\phi)(\omega) = \begin{cases} -1 \times 1,1 + 1 \times 1,2 = 0,1 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ -1 \times 1,1 + 1 \times 1,5 = 0,4 \end{cases}$

Sous ω_1 : $\begin{cases} V_{1+}(\phi)(\omega_1) = 0,08 \times 1,1 + 0,02 \times 1,2 = 0,1 = V_1(\phi)(\omega_1) \\ V_{1+}(\phi)(\omega_2) = -16 \times 1,1 + 8 \times 1,5 = 0,4 = V_1(\phi)(\omega_2) \end{cases}$

La stratégie ③ est donc auto-financée.

$$\begin{aligned} \text{Mais } V_2(\phi)(\omega_2) &= -16 \times 1,2 + 12 \times 1,2 \\ &= -4,8 < 0. \end{aligned}$$

$$(V_2(\phi)(\omega_1) \geq 0)$$

La stratégie ③ n'est donc pas positive
donc pas admissible.

• ④ La stratégie ④ est prévisible

vérifie : $V_0(\phi) = 0$

$$V_1(\phi) = \begin{cases} -2 \times 1,1 + 2 \times 1,2 = 0,2 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ -2 \times 1,1 + 2 \times 1,5 = 0,8 & \text{si } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1^+(\phi) = 0,2 \\ V_1^+(\phi) = 0,8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_2(\phi)(\omega_1) = 0,6 \\ V_2(\phi)(\omega_2) = 0 \end{array}$$

c'est une stratégie d'arbitrage donc le marché
n'est pas viable.