Exercice 7 : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ (2 aléas)

- $(S_n^{(0)})_{0 \le n \le 2}$ ne dépend pas de ω donc est un actif non risqué.

ω_1 : $S_1^{(1)} = 1,2$ —— $S_2^{(1)} = 1,5$

ω_2 : $S_1^{(1)} = 1,5$ —— $S_2^{(1)} = 1,2$

On a : $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1^{(1)}) = \sigma(\{\omega_1\}, \{\omega_2\}) = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$.

- Une stratégie est prévisible si ϕ_{n+1} $(n = 0, 1)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$.

Ici il suffit donc que ϕ_1 (la manière dont on constitue le portefeuille au temps 0) soit $\mathcal{F}_0$-adaptée c'est-à-dire déterministe.

La stratégie ⓓ n'est donc pas prévisible $\phi_1(\omega_1) \neq \phi_1(\omega_2)$

- Elle est auto-financée si ici pour tout ω

$$V_1(\phi) = V_{1^+}(\phi)$$

$$V_1(\phi) = \phi_1 \cdot S_1 = \phi_1^{(0)} S_1^{(0)} + \phi_1^{(1)} S_1^{1}$$

valeur du portefeuille obtenue au temps 1

$$V_{1^+}(\phi) = \phi_2 \cdot S_1 = \phi_2^{(0)} S_1^{(0)} + \phi_2^{(1)} S_1^{1}$$

répartition du portefeuille entre les instants 1 et 2.

<u>stratégie (a)</u> : $\phi_1^{(0)} = -1$, $\phi_1^{(1)} = 2$ $\quad V_{0^+}(\phi) = +\phi_1^{(0)} S_0^{(0)} + \phi_1^{(1)} S_0^{(1)}$

$$= -1 \times 1 + 1,2$$

$$= 1$$

. $V_1(\phi)(\omega) = \phi_1^{(0)} S_1^{(0)} + \phi_1^{(1)} S_1^{(1)}$

$$= \begin{cases} -1 \times 1,1 + 2 \times 1,2 = 1,3 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ -1 \times 1,1 + 2 \times 1,5 = 1,9 & \text{si } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

. $V_{1^+}(\phi)(\omega) = \phi_2^{(0)} S_1^{(0)} + \phi_2^{(1)} S_1^{(1)}$

$$\begin{cases} = -1 \times 1,1 + 1 \times 1,2 = 0,1 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ = -1 \times 1,1 + 1 \times 1,5 = 0,4 & \text{si } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

La stratégie n'est pas auto-financé
Dans les 2 cas, il y a eu retrait d'argent.

(elle est prévisible et positive).
(calculer $V_2(\phi)$)

.

. La stratégie doit aussi être de valeur globale <u>positive</u> (pour tout aléa).

(c) <u>stratégie c.</u>

$V_0(\phi) = 0$.

$$V_1(\phi)(\omega) = \begin{cases} -1 \times 1,1 + 1 \times 1,2 = 0,1 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ -1 \times 1,1 + 1 \times 1,5 = 0,4 \end{cases}$$

<u>Sous ω_1</u> : $\begin{cases} V_{1^+}(\phi)(\omega_1) = 0,08 \times 1,1 + 0,01 \times 1,2 = 0,1 = V_1(\phi)(\omega_1) \\ V_{1^+}(\phi)(\omega_2) = -16 \times 1,1 + 8 \times 1,5 = 0,4 = V_1(\phi)(\omega_2) \end{cases}$

La stratégie © est donc auto-financée.

Mais $V_2(\phi)(\omega_2) = -16 \times 1{,}2 + 12 \times 1{,}2$
$= -4{,}8 < 0$.

$(V_1(\phi)(\omega_1) \geq 0)$

La stratégie © n'est donc pas positive donc pas admissible.

• ⓔ La stratégie ⓔ est admissible

vérifie : $V_0(\phi) = 0$

$V_1(\phi) = \begin{cases} -2 \times 1{,}1 + 2 \times 1{,}2 = 0{,}2 & \text{si } \omega = \omega_1 \\ -2 \times 1{,}1 + 2 \times 1{,}5 = 0{,}8 & \text{si } \omega = \omega_2 \end{cases}$

$\begin{cases} V_1^+(\phi) = 0{,}2 \ , & V_2(\phi)(\omega_1) = 0{,}6 \\ V_1^+(\phi) = 0{,}8 \ , & V_2(\phi)(\omega_2) = 0 \end{cases}$

C'est une stratégie d'arbitrage donc le marché n'est pas viable.