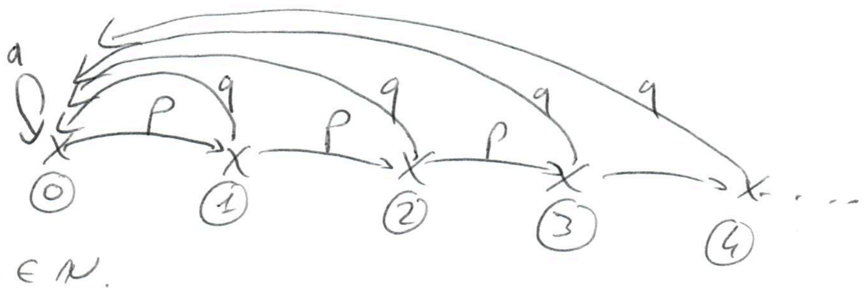
Exercice 3 : Sur $\mathbb{N}$: $\begin{cases} P(h,h+1) = p & , h \geq 0 \\ P(h,0) = q & , h \geq 0. \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 0<p<1 \\ q=1-p \end{pmatrix}$

1) 

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $0 \to 1 \to 2 \to \dots \to n$

et $n \to 0$

donc 0 et n sont dans la même classe.

Il n'y a donc qu'une seule classe communiquante

La chaîne est irréductible.

On a $0 \to 1 \to 0$ longueur 2

$0 \to 1 \to 2 \to 0$ longueur 3

donc la période de 0 divise $pgcd(2,3) = 1$.

donc $d(0) = 1$. (ou $0 \to 0$ longueur 1).

La période est une propriété de classe donc la chaîne est apériodique.

2) On note $\tau_0 = \inf\{n \geq 1, X_n = 0\}$ le temps de retour en 0.

On a $\mathbb{P}_0(\tau_0 = h) = \mathbb{P}_0(X_1 = 1, X_2 = 2, \dots, X_{h-1} = h-1, X_h = 0)$

$= p^{h-1} q.$

On reconnaît la loi géométrique de paramètre q.

On a $\mathbb{P}_0(\tau_0 \geq k) = \mathbb{P}_0(X_1 = 1, X_2 = 2, \dots, X_{k-1} = k-1)$

$$= p^{k-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

d'où $\mathbb{P}_0(\tau_0 < +\infty) = \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}_0(\tau_0 \geq k) = 0$

donc 0 est un état récurrent.

3) De plus, la loi géométrique est intégrable

et $\mathbb{E}_0[\tau_0] = \frac{1}{q} < +\infty$.

donc 0 est un état récurrent positif.

4) La chaîne est irréductible, récurrente positive

donc admet une unique mesure de probabilité invariante.

5) Soit μ vérifiant $\mu P = \mu$.

Soit $k \geq 1$, on a donc $\mu(k) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(j) P(j,k) = p\,\mu(k-1)$

$$\left(\text{et } \mu(0) = \mu P(0) = \sum_{k \geq 0} \mu(k) P(k,0) = \sum_{k \geq 0} \mu(k)\, q. \right)$$

Par récurrence immédiate, on trouve : $\mu(k) = p^k \mu(0)$.

$$\sum_{k\geq 0} \mu(k) = \mu(0) \sum_{k\geq 0} p^k = \mu(0) \frac{1}{1-p}$$

donc $\sum_{k\geq 0} \mu(k) = 1 \iff \mu(0) = 1-p = q.$

La mesure de probabilité invariante est donc donnée par :

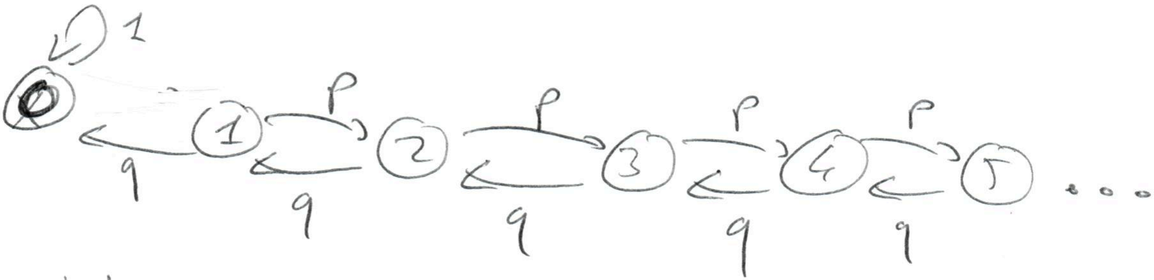
$$\mu(k) = p^k q. \quad , k \geq 0.$$

Exercice 4 : $k \geq 1$ $P(k, k+1) = p$ $\left(\begin{array}{l} 0 < p < 1 \\ q = 1-p \end{array} \right)$

$P(k, k-1) = q$

$P(0,0) = 1$

1)



$\{0\}$ état absorbant : classe récurrente.

$\{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}^*$ classe non fermée donc transiente.

2) On part de $X_0 = 1$. La classe $\{1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}^*$ étant transiente, avec probabilité 1, on ne visitera qu'un nombre fini de fois les états de la classe, donc ou bien il existe $n \geq 1$ tel que $X_n = 0$, ou bien $X_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3) On pose $H_j = \inf \{ n \geq 0, X_n = j \}$.

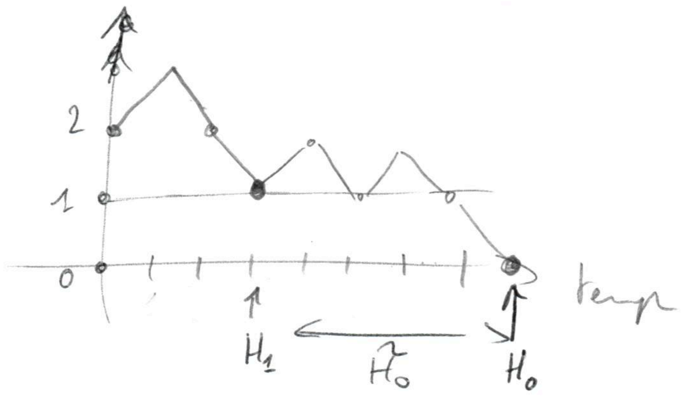
et pour $0 \leq s < 1$, $\phi(s) = E_1 [s^{H_0}]$.

$$= \sum_{0 \leq k < +\infty} s^k P_1 (H_0 = k).$$

Partant de 2, le temps d'atteinte de 0

s'écrit comme la somme du temps d'atteinte de 1 (H_1)

et ~~de~~ partant de 1, le temps d'atteinte de 0.



- Par la propriété forte de Markov $\tilde{H}_0$ et H_1 sont indépendants.

- De plus comme les transitions $P(k,k+1)$ et $P(k,k-1)$ ne dépendent pas de k pour $k \geq 1$,

  les lois de H_1 sachant que $X_0 = 2$

  et de H_0 sachant que $X_1 = 1$

  sont les mêmes.

  et $\tilde{H}_0$ a même loi que H_0 sachant que $X_1 = 1$.

D'où $E_2[s^{H_0}]$

$$= E_2[s^{H_1 + \tilde{H}_0}]$$

$$= E_2\left[E_2[s^{H_1} s^{\tilde{H}_0} \mid H_1] \right]$$

$$= E_2\left[E_2[s^{H_1} \mid H_1] \; E_2[s^{\tilde{H}_0} \mid H_1] \right]$$

$$= \mathbb{E}_2\Big[\mathbb{E}_2\left[s^{H_1}\right] \cdot \mathbb{E}_1\left[s^{H_0}\right]\Big]$$

$$= \mathbb{E}_2\left[s^{H_1}\right] \cdot \mathbb{E}_1\left[s^{H_0}\right]$$

$$= \mathbb{E}_1\left[s^{H_0}\right]^2 = \phi(s)^2.$$

4) Maintenant, en regardant ce qui se passe ~~pour~~ le premier saut :

$$\phi(s) = \mathbb{E}_1\left[s^{H_0}\right]$$

$$= q\,\mathbb{E}_0\left[s^{1+H_0}\right] + p\,\mathbb{E}_2\left[s^{1+H_0}\right]$$

$$= q\,s + p\,s\,\mathbb{E}_2\left[s^{H_0}\right]$$

(car sous $\mathbb{P}_0$, $H_0 = 0$,)

$$= qs + ps\,\phi(s)^2.$$

pour $s > 0$,

On a donc $\phi(s)$ solution de :

$$ps\,x^2 - x + qs = 0$$

$$\Delta = 1 - 4pqs^2 > 0 \quad \text{car } 0 \leq s < 1$$

et $0 \leq pq = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

d'où $\phi(s) = \dfrac{1 + \sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}$

ou $\phi(s) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4pqs^2}}{2ps}$.

Or $\phi(s)$ est continue (et $0 \leq \phi(s) \leq 1$)

et $\phi(0) = 1$.

donc $\phi(s) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}$.

(5) $\phi(s) = E_1[s^{H_0}]$

$$= \sum_{1 \leq k < +\infty} s^k \, \mathbb{P}(H_0 = k)$$

$$\xrightarrow[s \to 1]{\leq} \sum_{1 \leq k < +\infty} \mathbb{P}_1(H_0 = k) \quad \left(\text{par théorème de convergence monotone.}\right)$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{P}_1(H_0 \in \mathbb{N})$$

$$= \mathbb{P}_1(H_0 < +\infty)$$

On a donc:

$$\mathbb{P}_1(H_0 < +\infty) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2p}$$

Or $\sqrt{1 - 4(pq)} = \sqrt{1 - 4p(1-p)} = \sqrt{4p^2 - 4p + 1} = \sqrt{(2p-1)^2}$

$= |2p-1| = |2q-1|$.

- Si $p \leq q$ (ie $p \leq \frac{1}{2}$), $\sqrt{1 - 4pq} = 1 - 2p$ et $\mathbb{P}_1(H_0 < +\infty) = 1$

Si $p \geq q$ (i.e $p \geq \frac{1}{2}$) $\sqrt{1 - 4pq} = 2p - 1 = 1 - 2q$

et $\mathbb{P}_1(H_0 < +\infty) = \dfrac{q}{p}$.