Corrigé DS Markov 2017

Exercice 1

Cet exercice modélise en fait la loi géométrique.

1) On remarque que : $X_n = \max(U_1, \dots, U_n)$ $n \geq 0$

et $X_{n+1} = \max(X_n, U_{n+1})$

D'après le critère vu en cours $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov.

Et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0)$

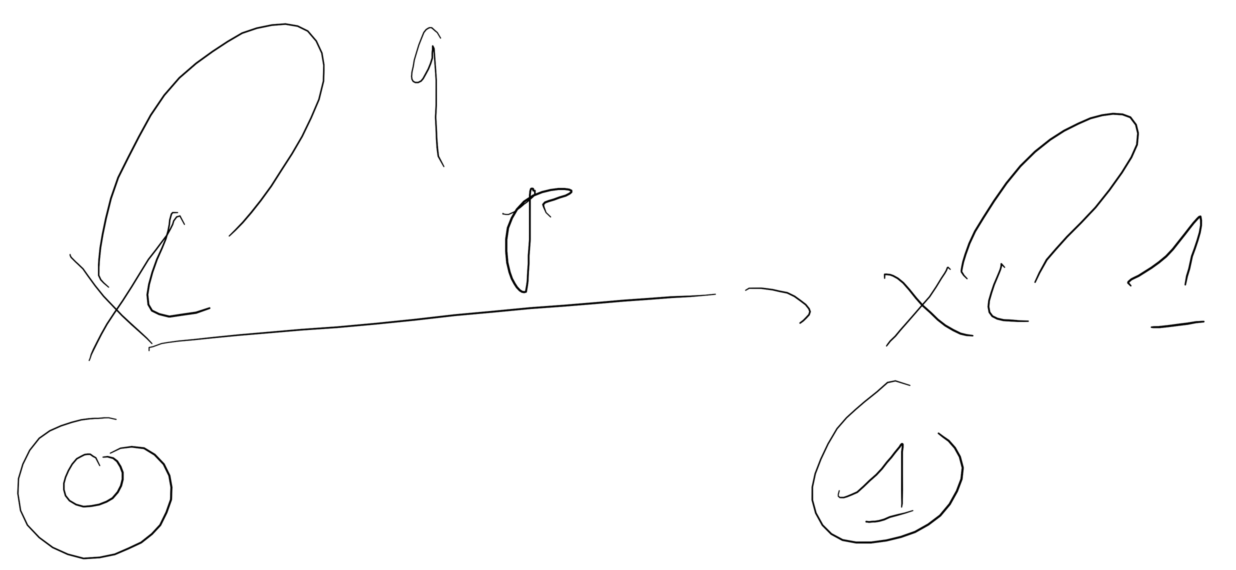
$= \mathbb{P}(U_{n+1} = 1 \mid X_n = 0)$

$= \mathbb{P}(U_{n+1} = 1) = p$ (indépendance).

De même $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = q = 1 - p$.

et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1) = 1$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = 0$

Donc la matrice de transition est donnée par $P = \begin{pmatrix} q & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $E = \{0, 1\}$



2) $\{1\}$ est un état absorbant

classe fermée récurrente.

$\{0\}$ classe non fermée donc transiente.

3) $\mathbb{P}_0(X_n = 0) = \mathbb{P}(U_1 = 0, U_2 = 0, \dots, U_n = 0)$

$= q^n$ indépendance.

4) P^n étant stochastique,

$$P^n = \begin{pmatrix} q^n & 1-q^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) On note $T_1 = \inf\{n \geq 0, X_n = 1\}$.

$$\{T_1 = n\} = \{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} = 0\} \cap \{X_n = 1\}$$

$$\mathbb{P}_0(T_1 = n) = q \times q \times q \times \quad \times q \times p$$

$$= q^{n-1} p.$$

Rq: $T_1 \sim \mathcal{G}(p)$.

6) D'après les résultats sur les temps moyens d'absorption :

$$\mathbb{E}_0[T_1] = 1 + p\,\underbrace{\mathbb{E}_1[T_1]}_{=0} + q\,\mathbb{E}_0[T_1]$$

d'où $(1-q)\,\mathbb{E}_0[T_1] = 1$

et $\mathbb{E}_0[T_1] = \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p}$.

<u>Rq</u> : Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}[X] = \sum_{k\geq 0} k\,\mathbb{P}(X=k)$

$$= \sum_{k\geq 0} k\, q^{k-1} \times p$$

$$= \frac{1}{p}.$$

<u>Exercice 2</u> : $P = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) P est stochastique si et seulement si $0 \leq a \leq 1$ et $b = 1-a$.

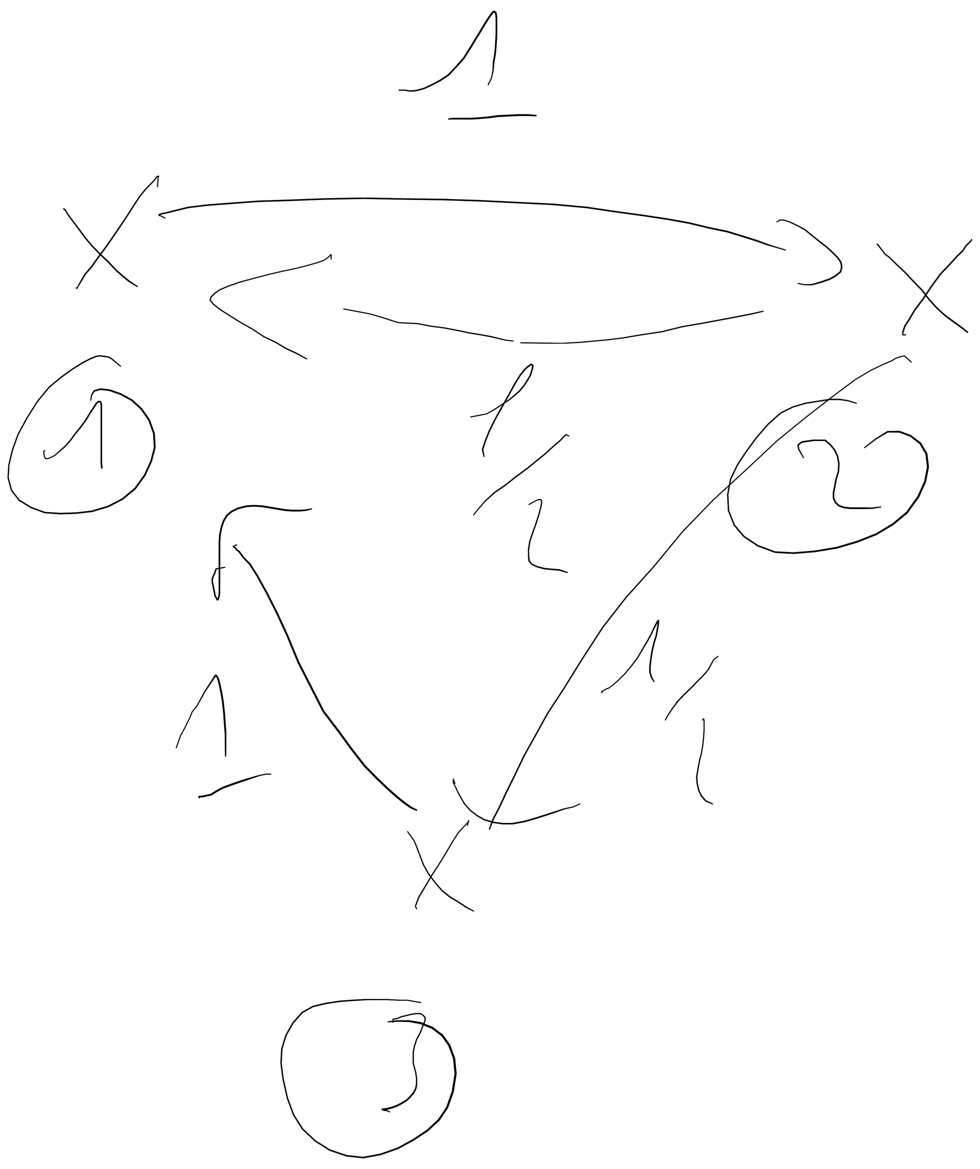
2) $\underline{a = 1}$

classes : {1} absorbant récurrent

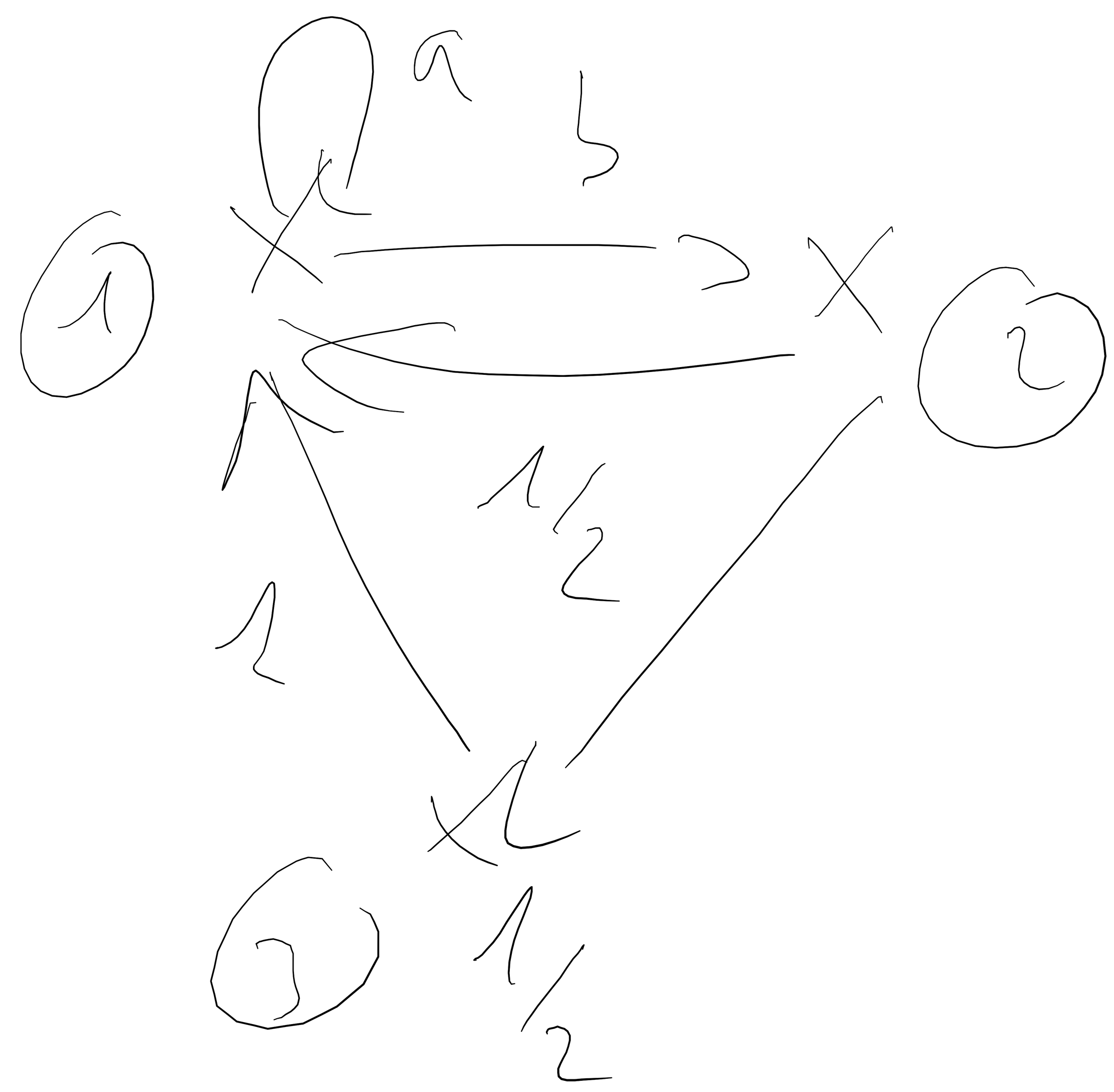
{2} } pas fermées
{3} } transients

3) $\underline{0 \leq a < 1}$

$\underline{0 < a < 1}$



$\underline{a = 0}$



$1 \to 2 \to 3 \to 1$

1 seule classe

$1 \to 2 \to 3 \to 1$

1 seule classe

$1 \to 2 \to 1$

$1 \to 2 \to 3 \to 1$

$d(1) \mid \text{pgcd}(2,3) = 1$

$1 \to 1$

$d(1) = 1$

Dans tous les cas la chaîne est

irréductible et apériodique.

4) Soit $\mu \in \mathbb{R}^3$ $\mu = (\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3)$

$\mu P = \mu$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \mu_3 = \mu_1 \\ b\mu_1 = \mu_2 \\ \frac{1}{2}\mu_2 = \mu_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{a\mu_1 + \frac{b}{2}\mu_1 + \frac{b}{2}\mu_1} = \mu_1 & (a+b=1) \\ \mu_2 = b\mu_1 \\ \mu_3 = \frac{b}{2}\mu_1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \mu \in \mathrm{Vect}\left(1, b, \frac{b}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu = \lambda \left(1, b, \frac{b}{2}\right)$

μ est une mesure positive
si et seulement si $b \geq 0$
et c'est une mesure de probabilité

si et seulement si $\lambda\left(1+b+\frac{b}{2}\right)=1$

$$\lambda = \frac{1}{1+\frac{3}{2}b}.$$

5) Dans le cas où $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$
on obtient que $\mu=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$
est (l'unique) mesure de probabilité
invariante.

d'où $\mu P=\mu$

et pour $n \geq 0$ $\mu P^n=\mu$

donc la loi de la chaîne au temps
n est encore μ.

Exercice 3 :

1) voir cours.

2) T_A est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T_A = n\} \in \sigma(X_0, \dots X_n)$

En effet :

$$\{T_A = n\} = \{X_0 \notin A\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} \notin A\} \cap \{X_n \in A\}.$$

3) $S_1 = \inf\{n \geq 0,\ X_n = i, X_{n+1} = j\}$

$S_2 = \inf\{n \geq 1,\ X_n = i, X_{n-1} = j\}$.

S_1 n'est pas un temps d'arrêt

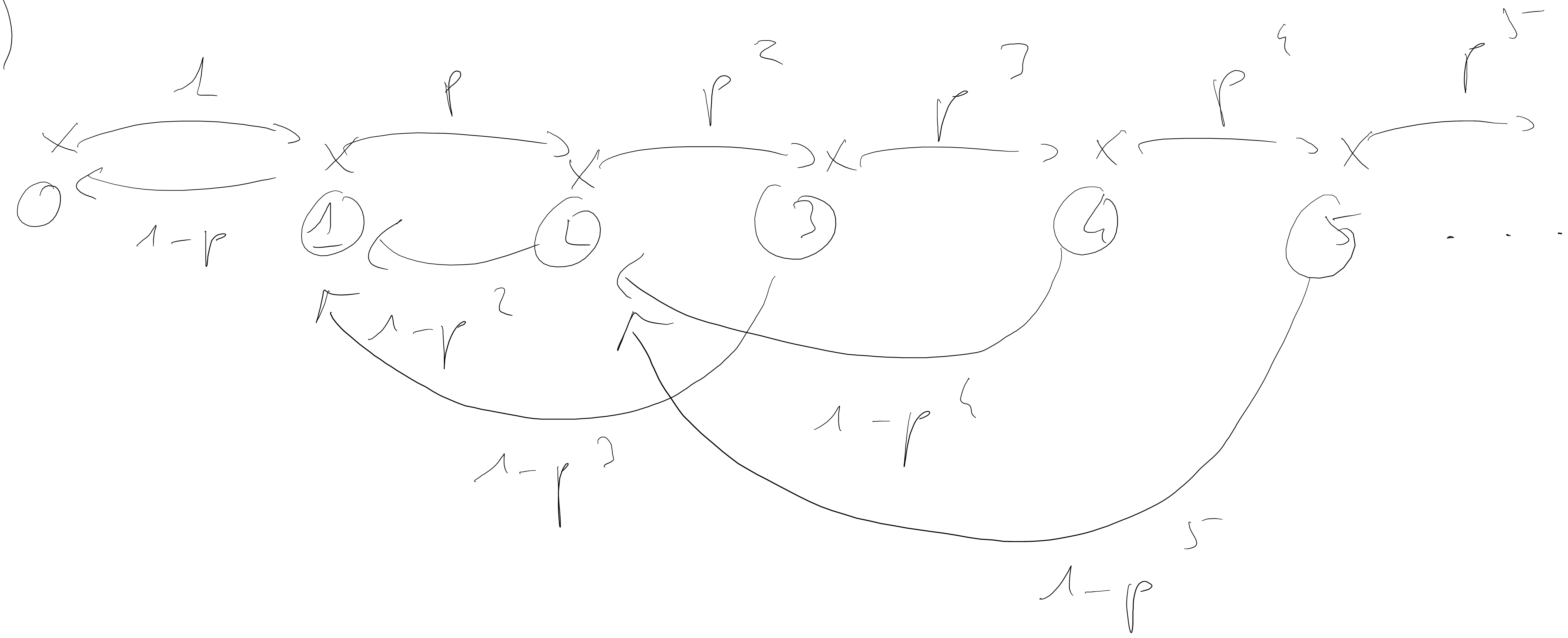
car pour savoir si $S_1(\omega) = n$, il faut connaître $X_{n+1}(\omega)$.

donc $\{S_1 = n\} \notin \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

S_2 est bien un temps d'arrêt.

Exercice 4 : protocole de transmission TCP.

1)



2) On a : $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \dots \to 2^n$

Soit $n \geq 1$ et $2^n \to 2^{n-1} \to \dots 2 \to 1 \to 0$.

donc tous les états $0, 1, \dots, 2^n$ sont dans la même classe.

Il n'y a qu'une seule classe.

La chaîne est irréductible.

3) On a : $1 \to 2 \to 1$ et pgcd(2,3) = 1

et $1 \to 2 \to 3 \to 1$

donc la période de 1 est 1

C'est une propriété de classe.

donc la chaîne est apériodique.

4) voir cours.

5) Si $X_0 = k$.

on a $\mathbb{P}_k(X_1 = k+1) = p^k$

et $\mathbb{P}_k\left(X_1 = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) = 1 - p^k$

d'où :

$$E_k[X_1] = p^k(k+1) + (1-p^k) \times \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

$$\leq k\left(p^k + \frac{1}{2} - \frac{p^k}{2}\right) + p^k$$

$$= k\left(\frac{1}{2} + \frac{p^k}{2}\right) + p^k$$

et $\mathbb{E}_k[X_1] - k$

$$\leq p^k + k\left(\frac{p^k}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\leq 1 - \left(\frac{1-p}{2}\right)k$$

$$\leq -1 \quad \text{pour } k \geq \frac{4}{1-p}.$$

En utilisant ce résultat et un peu de théorie des martingales on montre (critère de Foster) que la chaîne est récurrente positive.