Université de Bordeaux 1, L3 Probabilités, 2012-2013

Corrigé du DM 2

Exercice 1. Inégalité de Hoeffding.

1)a) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé.
• L'inégalité est triviale si $t = 0$.
• Supposons que $t \neq 0$ et considérons la fonction $f : x \mapsto f(x) = e^{tx}$. On peut noter que f est convexe sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée seconde est strictement positive puisque l'on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = t^2 e^{tx} > 0$.
On rappelle que la convexité de f signifie que :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \alpha \in [0,1], \qquad f(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v).$$

Soit $x \in [-1,1]$. Si on pose $\alpha := (1-x)/2$, on peut noter que cet élément α est dans $[0,1]$ et que $1-\alpha = (1+x)/2$. Ainsi, en prenant $u = -1$ et $v = 1$, on a par l'inégalité de convexité :

$$f(x) = f\left(\frac{1-x}{2} \times (-1) + \frac{1+x}{2} \times (+1)\right) \leq \frac{1-x}{2} f(-1) + \frac{1+x}{2} f(1).$$

Ainsi : $\forall x \in [-1,1], \quad \exp(tx) \leq \frac{1}{2}(1-x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)e^{t}$.

b) On considère X une v.a.r $\mathbf{P}$-p.s. bornée par 1 i.e. telle que : $|X| \leq 1$ $\mathbf{P}$-p.s. i.e. $\mathbf{P}(|X| \leq 1) = 1$. De plus, on suppose que X est centrée i.e. que : $\mathbf{E}(X) = 0$.

• Montrons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable e^{tX} est intégrable et $\mathbf{E}(e^{tX})$ existe :

- Ici on va utiliser le fait que toute v.a.r Y qui est $\mathbf{P}$-p.s bornée est intégrable i.e. telle que $\mathbf{E}(|Y|) < +\infty$.
En effet : s'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait $|Y| \leq C$ $\mathbf{P}$-p.s., alors par croissance de l'espérance ceci implique que : $\mathbf{E}(|Y|) \leq \mathbf{E}(C)$. Le résultat en découle puisque $\mathbf{E}(C) = C < +\infty$.

- Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme la v.a. X est $\mathbf{P}$-p.s. bornée par 1, la variable e^{tX} est aussi $\mathbf{P}$-p.s. bornée (car $\mathbf{P}$-p.s., $|X| \leq 1$ implique : $0 \leq e^{tX} \leq e^{|tX|} \leq e^{|t|}$). Donc la variable e^{tX} est intégrable et $\mathbf{E}(e^{tX})$ existe.

• - Supposer que $|X| \leq 1$ $\mathbf{P}$-p.s signifie qu'il existe un évènement $\tilde{\Omega} \in \mathcal{F}$ tel que :

$$\mathbf{P}(\tilde{\Omega}) = 1 \qquad \text{et} \qquad |X(\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \in \tilde{\Omega}.$$

Donc par a), on a :

$$\forall \omega \in \tilde{\Omega}, \quad \exp(tX(\omega)) \leq (1 - X(\omega))\, e^{-t}/2 + (1 + X(\omega))\, e^{t}/2.$$

Puisque $\mathbf{P}(\tilde{\Omega}) = 1$, cela signifie que :

$$\mathbf{P}\text{-p.s.}, \quad \exp(tX) \leq (1-X)e^{-t}/2 + (1+X)e^{t}/2.$$

Par passage à l'espérance et croissance de l'espérance, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{tX}) \quad &\leq \quad \mathbf{E}\left[(1-X)e^{-t}/2 + (1+X)e^{t}/2\right] \\ &= (1 - \mathbf{E}(X))\, e^{-t}/2 + (1 + \mathbf{E}(X))\, e^{t}/2 \qquad \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{t}\right) \qquad \text{(puisque } \mathbf{E}(X) = 0\text{).} \end{aligned}$$

- En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle : $e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a :

$$\text{pour tout réel } t, \quad \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{et} \qquad e^{t^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k \times k!}.$$

Or on peut noter que :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad (2k)! = (2k) \times (2k-1) \times \ldots \times (k+1) \times k! \geq 2^k \times k!.$$

Ceci implique que : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k \times k!}$ i.e. que l'on a : $(e^t + e^{-t})/2 \leq e^{t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Par suite : $\mathbf{E}[\exp(tX)] \leq e^{t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Considérons $i \in \mathbb{N}^*$ quelconque et posons $Y_i = X_i/c_i$. La variable X_i étant supposée centrée et $\mathbf{P}$-p.s. bornée par c_i, la variable Y_i est centrée et $\mathbf{P}$-p.s. bornée par 1. Donc si on pose $t_i = tc_i$, en appliquant l'inégalité obtenue à la fin de la question 1) avec $t = t_i$ et $X = Y_i$, on a :

$$\text{pour tout } i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}[\exp(tX_i)] = \mathbf{E}(\, e^{(tc_i)\,(X_i/c_i)}\,) = \mathbf{E}(\, e^{(t_i)\,Y_i}\,) \leq \exp(t_i^2/2) = \exp(t^2 c_i^2/2).$$

- En outre, on suppose que les variables $(X_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes. Ceci implique que les variables $(\exp(tX_i))_{i\geq 1}$ le sont aussi donc on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\exp(tS_n)] = \mathbf{E}(\prod_{i=1}^n \exp(tX_i)) &= \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(\exp(tX_i)) \\ &\leq \prod_{i=1}^n \exp(\frac{t^2}{2} c_i^2) = \exp(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2). \end{aligned}$$

b) Soit $t > 0$. Comme la fonction : $y > 0 \mapsto \exp(ty)$ est strictement croissante, on a l'égalité suivante d'évènements :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \{S_n > \epsilon\} = \{\exp(tS_n) > \exp(t\epsilon)\}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_n > \epsilon) &= \mathbf{P}(e^{tS_n} > e^{t\epsilon}) \\ &\leq \frac{\mathbf{E}(e^{tS_n})}{e^{t\epsilon}} \qquad \text{(par l'inégalité de Markov)} \\ &\leq \exp(-t\epsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2) \qquad \text{(par le résultat du a)).} \end{aligned}$$

c) La majoration précédente est vérifiée pour tout réel $t > 0$. On peut noter que le majorant atteint son minimum pour $t = \epsilon / \sum_{i=1}^n c_i^2$. Ainsi :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbf{P}(S_n > \epsilon) \leq \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right).$$

d) - Pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$\{|\, S_n \,| > \epsilon\} = \{S_n > \epsilon\} \cup \{S_n < -\epsilon\}$$

qui est une réunion disjointe. Par suite : $\mathbf{P}(|\, S_n \,| > \epsilon) = \mathbf{P}(S_n > \epsilon) + \mathbf{P}(S_n < -\epsilon)$.

- Le premier terme de cette somme est majoré par le résultat du c).

Pour le second terme, on remarque que : $\mathbf{P}(S_n < -\epsilon) = \mathbf{P}(-S_n > \epsilon)$. En fait, les résultats précédents s'appliquent aussi avec $-S_n = \sum_{i=1}^n (-X_i)$ à la place de S_n puisque les variables $(-X_i)_{i\geq 1}$ sont (comme les $(X_i)_{i\geq 1}$) indépendantes, centrées et telles que pour tout $i \geq 1$: $\mathbf{P}(|-X_i| \leq c_i) = 1$.

Donc on a : pour tout $\epsilon > 0$, $\quad \mathbf{P}(| S_n |> \epsilon) = \mathbf{P}(S_n > \epsilon) + \mathbf{P}(-S_n > \epsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$.

e) Soit $\alpha > 0$. On suppose qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\sum_{i=1}^n c_i^2 \leq n^{2\alpha-\beta}$.

- D'après la question précédente, on a :

$$\mathbf{P}(| S_n/n^\alpha |> \epsilon) = \mathbf{P}(| S_n |> n^\alpha\epsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{n^{2\alpha}\epsilon^2}{2\sum_{i=1}^n c_i^2}\right) = 2\exp\left(-\frac{n^\beta\epsilon^2}{2}\right).$$

- Comme $\beta > 0$, on a par croissance comparée : $\exp\left(-\frac{n^\beta\epsilon^2}{2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.
- On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(| S_n/n^\alpha |> \epsilon)$ converge, et ce pour tout $\epsilon > 0$.

Par le lemme de Borel-Cantelli, on conclut que la suite $(S_n/n^\alpha)_{\geq 1}$ converge $\mathbf{P}$-p.s. vers 0.

3) On suppose ici que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables indépendantes et de même loi, avec X_1 centrée, $\mathbf{P}$-ps bornée par 1 et $\mathbf{P}$-ps non nulle.

a) Ici la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ vérifie les conditions du 2) avec $c_i = 1$ pour tout $i \geq 1$. On a alors,

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 = n = n^{2\alpha-(2\alpha-1)} = n^{2\alpha-\beta} \qquad \text{avec } \beta := 2\alpha - 1 \text{ qui est } > 0 \text{ dès que } \alpha > 1/2.$$

En appliquant le résultat du 2)e), on conclut que la suite $(S_n/n^\alpha)_{\geq 1}$ converge $\mathbf{P}$-ps vers 0 (pour tout $\alpha > 1/2$).

b) - Remarquons que la variable X_1 étant bornée p.s., elle est de carré intégrable. On note σ^2 sa variance. Comme X_1 est centrée, on a $\sigma^2 = \mathbf{E}(X_1^2)$; mais n'est pas p.s. nulle i.e. que $\mathbf{P}(X_1 \neq 0) > 0$, donc : $\sigma^2 > 0$.

- Les $(X_n)_{n\geq 1}$ étant indépendantes et de même loi que X_1 avec $\mathbf{E}(X_1) = 0$ et $\mathrm{var}(X_1) = \sigma^2$, le Théorème Central-Limite assure que la suite $\left(\frac{S_n}{\sigma.n^{1/2}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a. Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Ainsi, la suite $\left(\frac{S_n}{n^{1/2}}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la v.a. $Y = \sigma Z$ qui suit la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

- Comme $\sigma > 0$, la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ admet une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ donc $\mathbf{P}(Y = 0) = 0$. Autrement dit : Y est $\mathbf{P}$-p.s. différente de 0.

Ceci implique que la suite $\left(\frac{S_n}{n^{1/2}}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas en loi vers 0. A fortiori, elle ne converge pas $\mathbf{P}$-p.s. vers 0 car : d'après le cours, la convergence $\mathbf{P}$-p.s. vers 0 entraîne la convergence en loi vers 0.

Exercice 3.

a) Calcul de la fonction de répartition de F_X de X donnée par : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t) := \mathbf{P}(X \leq t)$.

- Puisque X admet une densité f_X nulle à l'extérieur de l'intervalle $]0,1[$, on a : $X(\Omega) =]0,1[$ $\mathbf{P}$-presque sûrement ce qui équivaut à $\mathbf{P}(0 < X < 1) = 1$. Donc on a :

- pour tout réel $t \leq 0$, $\quad F_X(t) = 0$,
- et pour tout réel $t \geq 1$, $\quad F_X(t) = 1$.

- Si $t \in]0,1[$, on a :

$$F_X(t) = \mathbf{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f_X(x)\,dx = \int_{]-\infty,t]\cap]0,1[} \frac{1}{a}\,x^{\frac{1}{a}-1}\,dx = \int_0^t \frac{1}{a}\,x^{\frac{1}{a}-1}\,dx = \left[x^{\frac{1}{a}}\right]_0^t = t^{\frac{1}{a}}.$$

Par conséquent, la fonction de répartition de F_X de X vaut :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t \leq 0, \\ t^{\frac{1}{a}} & \text{si } \ 0 < t < 1, \\ 1 & \text{si } \ t \geq 1. \end{cases}$$

b) Pour déterminer la loi de la variable $Y = -\dfrac{2}{a}\ln(X)$, il existe au moins 2 méthodes possibles.
Dans ce qui suit, on note φ la fonction donnée par :

$$\text{pour tout } x > 0, \quad \varphi(x) = -\frac{2}{a}\ln(x) \qquad (\star).$$

Par définition de Y, on a : $Y = \varphi(X)$.

i) $1^{\text{ère}}$ méthode : via la fonction de répartition.

• Calculons tout d'abord la fonction de répartition F_Y de Y en utilisant la question a) :
- On peut d'abord noter que la v.a. Y est $\mathbf{P}$-presque sûrement ($\mathbf{P}$-p.s.) à valeurs dans $]0,+\infty[$ i.e. que $Y(\Omega) =]0,+\infty[$ $\mathbf{P}$-p.s. En effet : comme la fonction ln est continue sur $]0,1[$ avec $\ln(]0,1[) =]-\infty,0[$ et que $a > 0$, on a : $\varphi(]0,1[) =]0,+\infty[$. Comme $X(\Omega) =]0,1[$ $\mathbf{P}$-p.s. et que $Y = \varphi(X)$, on déduit que : $Y(\Omega) =]0,+\infty[$ $\mathbf{P}$-p.s..
Ceci implique que : $F_Y(t) = 0$ pour tout réel $t \leq 0$.

- Soit $t > 0$ un réel quelconque. On a :

$$\begin{aligned} F_Y(t) = \mathbf{P}(Y \leq t) = \mathbf{P}\left(-\frac{2}{a}\ln(X) \leq t\right) &= \mathbf{P}\left(\ln(X) \geq -\frac{a}{2}t\right) \qquad \text{(puisque } a > 0\text{)} \\ &= \mathbf{P}\left(X \geq e^{-\frac{a}{2}t}\right) \qquad \text{(puisque la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}\text{)} \\ &= 1 - F_X\left(e^{-\frac{a}{2}t}\right). \end{aligned}$$

Comme $t > 0$, on a $e^{-\frac{a}{2}t} \in]0,1[$ ce qui donne par a) : $F_Y(t) = 1 - e^{-t/2}$.
On conclut que la fonction de répartition Y vaut :

$$F_Y(t) = \left(1 - e^{-t/2}\right)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t) \qquad (\star\star).$$

• Maintenant on peut conclure de deux façons :
- Soit on reconnaît directement que $(\star\star)$ est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $1/2$. Alors, comme la fonction de répartition d'une v.a.r. caractérise sa loi, on peut en déduire que : $Y \sim \mathcal{E}(1/2)$.

- Sinon : comme la fonction F_Y donnée par $(\star\star)$ est clairement continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, on peut en déduire que Y admet pour densité :

$$f_Y(y) = F_Y'(y).\,\mathbf{1}_{y\neq 0} = \frac{1}{2}e^{-y/2}\,\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

qui est la densité de la loi exponentielle de paramètre $1/2$. On retrouve donc bien le fait que $Y \sim \mathcal{E}(1/2)$.

ii) $2^{\text{ème}}$ méthode : on peut aussi utiliser la méthode de la Fonction Muette.
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée quelconque.

• Par définition de $(\star)$, on a :

$$\mathbf{E}(g(Y)) = \mathbf{E}\left[g(\varphi(X))\right] = \int_{\mathbb{R}} g(\varphi(x))\,f_X(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(\varphi(x))\,\frac{1}{a}\,x^{\frac{1}{a}-1}\,\mathbf{1}_{]0,1[}(x)\,dx.$$

• Montrons que la fonction φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U} =]0,1[$ sur $\mathcal{V} =]0,+\infty[$:
la fonction usuelle $x \mapsto \ln(x)$ est une bijection de $\mathcal{U} =]0,1[$ sur $]-\infty,0[:= -\mathcal{V}$ avec $(\ln)^{-1} = \exp$. De plus, les fonctions ln et exp sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. En notant que $-2/a < 0$, ceci implique que la fonction φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{U} =]0,1[$ sur $\mathcal{V} =]0,+\infty[$. En outre, si on note φ^{-1} la réciproque de φ, on voit facilement que :

$$\forall y > 0, \quad \varphi^{-1}(y) = e^{-ay/2}$$

qui est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{V} =]0,+\infty[$.

- - Par ailleurs, on a :
$$\forall y > 0, \quad (\varphi^{-1})'(y) = -\frac{a}{2} e^{-ay/2} = -\left|(\varphi^{-1})'(y)\right|.$$
- Donc en posant $y = \varphi(x)$, la formule de changement de variable dans l'intégrale donne :
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} g(y)\, f_X(\varphi^{-1}(y))\, \left|(\varphi^{-1})'(y)\right|\, \mathbf{1}_{\mathcal{V}}(y)\, dy &= \int_{\mathbb{R}} g(y)\, f_X(e^{-ay/2})\, \frac{a}{2} e^{-ay/2}\, \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y)\, f_Y(y)\, dy\end{aligned}$$
avec $f_Y(y) = \frac{1}{2}\, e^{-y/2}\, \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y)$ qui est la densité de la loi exponentielle de paramètre $1/2$.
Ceci étant vrai pour toute fonction borélienne bornée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le Théorème de la fonction muette nous permet de conclure que : $Y \sim \mathcal{E}(1/2)$.