Eléments de corrigé

Ex 1 : 1) $\mathbb{P}(X \geq t) = \int_t^{+\infty} f_X(u)\,du = e^{-\lambda t}$ $t \geq 0$.

2) $\mathbb{P}(X > t+s \mid X > s) = \dfrac{\mathbb{P}(\{X > t+s\} \cap \{X > s\})}{\mathbb{P}(X > s)}$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}$$

$$= e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t).$$

3) Supposons que Y vérifie la propriété d'absence de mémoire

on a donc $\mathbb{P}(Y > t+s) = \mathbb{P}(Y > t)\,\mathbb{P}(X > s)$, $t, s \geq 0$.

c.à.d $\int_{t+s}^{+\infty} f_Y(u)\,du = \left(\int_t^{+\infty} f_Y(u)\,du\right)\left(\int_s^{+\infty} f_Y(u)\,du\right)$

En dérivant par rapport à la variable t, on obtient :

$$-f_Y(t+s) = -f_Y(t)\left(\int_s^{+\infty} f_Y(u)\,du\right).$$

d'où $f_Y(t+s) = f_Y(t)\left(1 - \int_0^s f_Y(u)\,du\right)$

donc $\dfrac{f_Y(t+s) - f_Y(t)}{s} = -f_Y(t)\left(\dfrac{1}{s}\int_0^s f_Y(u)\,du\right)$

Par continuité : $\dfrac{1}{s}\int_0^s f_Y(u)\,du \xrightarrow[s \to 0]{} f_Y(0) = \lambda.$

d'où : $\lim_{s \to 0, s>0} \frac{f_Y(t+s) - f_Y(t)}{s} = -\lambda f_Y(t)$, $t \geq 0$.

ce qui donne l'existence et la valeur de la dérivée à droite.

(4) $f_Y'(t) = -\lambda f_Y(t)$, $t \geq 0$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

L'ensemble de solutions est $y(t) = C e^{-\lambda t}$, $C \in \mathbb{R}$.

On a $f_Y(0) = \lambda$ donc $C = \lambda$

Donc $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

(5) Soit $T = \min(U, V)$ avec U, V indépendantes vérifiant la propriété d'absence de mémoire.

Soit $t, s \geq 0$

$$\mathbb{P}(T > t+s \mid T > s) = \mathbb{P}(\{U > t+s\} \cap \{V > t+s\} \mid \{U > s\} \cap \{V > s\})$$
$$= \frac{\mathbb{P}(\{U > t+s\} \cap \{V > t+s\})}{\mathbb{P}(\{U > s\} \cap \{V > s\})}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(U > t+s)}{\mathbb{P}(U > s)} \frac{\mathbb{P}(V > t+s)}{\mathbb{P}(V > s)} \quad \text{par indépendance}$$
$$= \mathbb{P}(U > t+s \mid U > s) \, \mathbb{P}(V > t+s \mid V > s) \quad \text{par absence de mémoire}$$
$$= \mathbb{P}(U > t) \, \mathbb{P}(V > t)$$
$$= \mathbb{P}(T > t).$$

6) $Z = \min(X, Y)$ X, Y indépendants.

- $\mathbb{P}(Z > r) = \mathbb{P}(\{X > r\} \cap \{Y > r\})$

$= \mathbb{P}(X > r) \; \mathbb{P}(Y > r)$

$= e^{-\lambda r} \; e^{-\mu r} = e^{-(\lambda+\mu) r}$ $r \geq 0$.

d'où $F_Z(r) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda+\mu)r} & r \geq 0 \\ 0 & \text{si } r \leq 0 \end{cases}$.

d'où $Z \sim \mathcal{E}(\lambda+\mu)$.

Exercice 2

1) $j \in \{0, \dots 6\}$ $i \in \{1, \dots 6\}$.

La loi de X sachant que $D = i$ est une binomiale $\mathrm{Bin}(i, p)$

donc si $0 \leq j \leq i$, $\mathbb{P}(X = j \mid D = i) = \binom{i}{j} p^j q^{i-j}$

2) . $\{X = 6\} = \{X = 6\} \cap \{D = 6\}$

$\mathbb{P}(X = 6) = \mathbb{P}(\{X = 6\} \cap \{D = 6\})$

$= \mathbb{P}(X = 6 \mid D = 6) \; \mathbb{P}(D = 6)$

$= p^6 \quad \frac{1}{6}$.

. $\{X = 4\} = (\{X = 4\} \cap \{D = 4\}) \cup (\{X = 4\} \cap \{D = 5\})$
$\cup (\{X = 4\} \cap \{D = 6\})$

$\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(\{X = 4\} \mid D = 4) \; \mathbb{P}(D = 4) + \mathbb{P}(X = 4 \mid D = 5) \; \mathbb{P}(D = 5)$
$+ \mathbb{P}(X = 4 \mid D = 6) \; \mathbb{P}(D = 6)$

$= \frac{1}{6}\left(p^4 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{=5} p^4 q + \underbrace{\binom{6}{4}}_{=15} p^4 q^2\right)$.

(3) $\mathbb{P}(X=0) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X=0 \cap D=i)$

$$= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X=0 \mid D=i)\, \mathbb{P}(D=i)$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} q^i = \frac{q}{6}(1+q+\dots+q^5)$$

$$= \frac{q}{6}\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right)$$

(4) Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(D=1 \mid X=0) = \frac{\mathbb{P}(D=1 \cap X=0)}{\mathbb{P}(X=0)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X=0 \mid D=1)\, \mathbb{P}(D=1)}{\mathbb{P}(X=0)}$$

$$= \frac{\frac{q}{6}}{\frac{q}{6}\left(\frac{1-q^6}{1-q}\right)} = \frac{1-q}{1-q^6}.$$

Exercice 3 :

1) $X \sim \mathrm{Unif}_{[0,1]}$ densité $f_X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{12}.$$

Par le théorème central limite :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Var(X_1)}} \left(M_n - E[X_1] \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

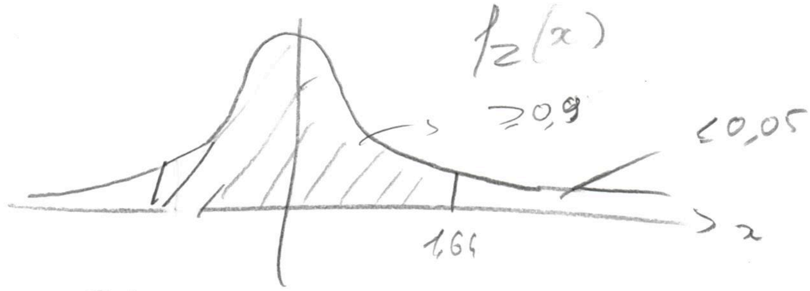
On a : $\mathbb{P}(0,4 \leq M_n \leq 0,6)$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}(0,4-0,5) \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}(M_n - 0,5) \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}(0,6-0,5) \right)$$

$$\simeq \mathbb{P}\left(-\sqrt{12}\sqrt{n} \times 0,1 \leq Z \leq \sqrt{12}\sqrt{n} \times 0,1 \right).$$

si n est suffisamment grand.

d'après le TCL. avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Pour avoir $\mathbb{P}(0,4 \leq M_n \leq 0,6) \geq 0,9$

on prend donc $\sqrt{12}\sqrt{n} \times 0,1 \geq 1,64$.

$$n \geq \frac{(1,64)^2 \, 10^2}{12} \simeq 22,4$$

on prend donc $n \geq 23$.

<u>Exercice 4</u> :
$$f(x,y) = \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} + h(x)h(y).$$

1) $h(x) = x \, \mathbb{1}_{|x| \leq a}$.

On remarque que $\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = \int_{-a}^{a} x \, dx = 0.$

Pour montrer que f est la densité d'un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$, il faut montrer que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$ et que $f(x,y) \geq 0$.

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \left(\int \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx\right)^2 = 1$$

car $\int_{\mathbb{R}^2} h(x)\,l(y)\,dx\,dy = \left(\int_{-a}^{a} l(x)\,dx\right)^2 = 0$.

. Pour a suffisament petit, $a>0$, on vérifie bien que $f(x,y) \geq 0$.

2) Loi de X :

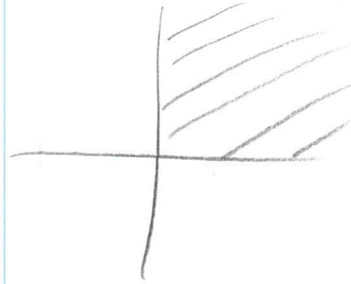
$$f_X(x) = \int_{y\in\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_y \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dy}_{=1} + h(x) \underbrace{\int_{y\in\mathbb{R}} l(y)\,dy}_{=0}$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

De même $f_Y(y) = \dfrac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ $\qquad X$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

3) Bien que les marginales suivent des lois normales, le vecteur (X,Y) n'est pas gaussien pour $a>0$. (Sa densité n'est pas continue donc ne peut pas être celle d'un vecteur gaussien).

4) $\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0) = \mathbb{P}((X,Y) \in D)$



D

$$= \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx\, dy + \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} h(x)\, h(y)\, dx\, dy.$$

$$= \left(\int_{x=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx\right)^2 + \left(\int_{x=0}^{a} x\, dx\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 = \frac{1+a^4}{4}.$$

5) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]\, E[Y].$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$
$Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc $E[X] = E[Y] = 0.$

$$E[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} (xy)\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \underbrace{\iint_{\mathbb{R}} xy \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi}\, dx\, dy}_{=0} + \int_{x=-a}^{a}\int_{y=-a}^{a} (xy)\, h(x)\, h(y)\, dx\, dy$$

$$= \left(\int_{-a}^{a} x^2\, dx\right)^2 = \left(\frac{2a^3}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} a^6.$$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{4}{9} a^6.$

Ex 5 : X, Y indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$

1

donc (X,Y) est un vecteur gaussien $\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, I_2\right)$.

$$\begin{pmatrix}U\\V\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(U,V) est une transformation linéaire d'un vecteur gaussien donc est aussi un vecteur gaussien.

Son espérance est $A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Sa matrice de covariance est $A\, Id\, A^t = AA^t = Id$.

2 On a $2XY = \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)^2$

3 Posons $W = 2XY$ et $Z = X^2 - Y^2$. et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to x^2 - y^2$.

On a : $\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = g(U,V) \end{cases}$

Les couples (U,V) et (X,Y) ont la même loi donc les variables aléatoires Z et W ont aussi la même loi.
(Par exemple $E[h(Z)] = E[h(W)]$ pour toute fonction h continue bornée $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Exercice 6. ① $X \in L^2$.

(i) $E[\frac{S_n}{n}] = E[X_1] = m$.

$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} m$ si et seulement si $E[|\frac{S_n}{n} - m|^2] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Or $E[|\frac{S_n}{n} - m|^2] = Var(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2} Var(S_n)$

$= \frac{1}{n} Var(X_1)$ par indépendance.

$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$, par Tchebychev :

$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n} \frac{Var(X_1)}{\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (ε fixé).

donc $\frac{S_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathbb{P}}} m$

② $X \in L^2$.

(i) La fonction caractéristique de $\frac{S_n}{n}$ vaut.

$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = E[e^{it(\frac{S_n}{n})}]$

$= E[e^{i\frac{t}{n}(X_1 + \dots + X_n)}]$

$= E[e^{i\frac{t}{n}X_1}] \times \dots \times E[e^{i\frac{t}{n}X_n}]$

$= \left(\varphi_{X_1}(\frac{t}{n})\right)^n$.

Or $X_1 \in L^1$, donc φ_{X_1} est dérivable

et $\varphi_{X_1}'(0) = i E[X] = im$.

donc $\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) = \varphi_{X_1}(0) + \frac{t}{n}\varphi_{X_1}'(0) + o\left(\frac{t}{n}\right)$

$$= 1 + im\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right).$$

donc $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \left(1 + \frac{imt}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(imt).$$

$t \mapsto \exp(imt)$ est la fonction caractéristique de la variable aléatoire constante égale à m.

donc $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{Loi} m$

ii) La convergence en loi vers une constante implique la convergence en probabilité.

En effet : soit $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq m+\epsilon\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq m-\epsilon\right).$$

Par convergence en loi :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq m-\epsilon\right) = F_{\frac{S_n}{n}}(m-\epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_m(m-\epsilon) = 0.$$

et $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} < m+\epsilon\right) = F_{\frac{S_n}{n}}(m+\epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_m(m+\epsilon) = 1$

donc $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq m+\epsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} m$.

2 a Soit $\varepsilon > 0$ et $t \geq 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon n)$$

$$= \mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geq e^{t\varepsilon n}\right) \quad t \geq 0$$

par croissance stricte de exponentielle

$$\leq \frac{\mathbb{E}[e^{tS_n}]}{e^{t\varepsilon n}} \quad \text{par Markov}$$

$$= e^{-t\varepsilon n} \, \mathbb{E}[e^{tX_1}]^n$$

par indépendance et même loi

b Considérons $g(t) = e^{-\varepsilon t} \, \mathbb{E}[e^{tX}]$

on a : $g(0) = 1$

$$g'(0) = -\varepsilon + \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=0} = -\varepsilon$$

$$\inf_{t \geq 0} g(t) < 1.$$

Posons $\alpha = \inf_{t \geq 0} g(t)$.

On a pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq g(t)^n$

en faisant tendre t vers l'infimum,

on obtient $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \alpha^n$.

c) $\alpha < 1$ donc $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) < +\infty$.

En appliquant ce qui précède avec $-X_i$ au lieu de X_i :
on obtient également $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(-\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) < +\infty$.

Or $\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right) + \mathbb{P}\left(-\frac{S_n}{n} \geq \epsilon\right)$

donc $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) < +\infty$

d) Par Borel-Cantelli, on en déduit que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup \left\{\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| \geq \epsilon\right\}\right) = 0$$

c'est-à-dire que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} 0$.