Université de Bordeaux 1, L3 Probabilités, 2012-2013

PARTIEL - Lundi 18 Mars 2013

Aucun document n'est autorisé.

Les 3 exercices sont indépendants.

EXERCICE 1.

Consignes : Dans tout cet exercice, on NE cherchera PAS à faire explicitement les calculs des différentes probabilités demandées : on vous demande juste d'écrire l'expression de ces calculs.

Un certain langage informatique utilise les 26 lettres de l'aphabet et les 10 chiffres de 0 à 9. On utilise ces 36 caractères pour constituer (au hasard) des codes d'accès de 6 caractères à un ordinateur.

1) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ naturellement associé à cette expérience aléatoire.

2) On considère un code pris au hasard. Calculer la probabilité des évènements suivants :

a) A="le code comporte au moins un chiffre"

b) B="le code comporte un seul chiffre qui apparaît exactement deux fois".

3) Calculer la probabilité que le code comporte exactement trois fois le chiffre 0 sachant que parmi les 2 premiers caractères du code, il y a exactement une fois le chiffre 0.

EXERCICE 2.

Etant donné un réel $a > 0$, on dit que X suit une loi de Paréto de paramètre a si $X = \exp(Z)$ où Z suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$ de paramètre a.

1) a) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1, \\ 1 - \dfrac{1}{t^a} & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

b) En déduire que X admet une densité de probabilité f_X. Puis donner l'expression de f_X.

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur a assurant que X admette un moment d'ordre k.

b) Sous cette condition, calculer ce moment d'ordre k.

3) Soit Y une variable aléatoire réelle indépendante de X et qui suit aussi la loi de Paréto de paramètre a. Démontrer que la variable $W = \min(X, Y)$ suit encore une loi de Paréto dont on déterminera le paramètre.

EXERCICE 3.

Considérons X et Y deux variables aléatoires réelles, indépendantes et qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = p\, q^{k-1} \qquad \text{où} \quad q = 1 - p.$$

On définit les variables aléatoires :

$$D = X - Y \qquad \text{et} \qquad M = \min(X, Y).$$

1) a) Calculer $\mathbf{P}(M > j)$ pour tout entier $j \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que M suit une une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

2) a) Soit $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Suivant que $i < 0$ ou $i \geq 0$, exprimer l'évènement $\{D = i\} \cap \{M = j\}$ à l'aide de 2 évènements faisant intervenir séparément X et Y.

b) Donner l'ensemble des valeurs prises par le couple (D, M).

c) Déduire de ce qui précède la loi du couple (D, M).

3) En utilisant la question 2), déduire que la loi de D est donnée par :

$$\mathbf{P}(D = i) = \frac{p^2}{1 - q^2}\, q^{|i|} \qquad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

4) Montrer que les variables D et M sont indépendantes.