Université de Bordeaux 1, L3 Probabilités, 2016-2017

Sujets de Contrôle Continu Oral de Probabilités.

Sujet 1 : Loi d'une variable aléatoire.

1) Définir la loi d'une variable aléatoire réelle.

2) Présenter quelques-unes des caractérisations de la loi d'une variable aléatoire que vous connaissez.

3) Soient $a > 0$ et $\lambda > 0$ deux réel fixés. On suppose que Y est une v.a.r. qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Déterminer la loi de probabilité de X définie par :

$$X := \begin{cases} Y & \text{si } 0 \leq Y < a, \\ a & \text{si } Y \geq a. \end{cases}$$

Sujet 2 : Calculs d'espérances et de variances.

Décrivez toutes les méthodes que vous connaissez pour le calcul d'espérances et de variances (calculs directs, utilisation des fonctions caractéristiques, génératrices...). Donnez des illustrations à l'aide d'exemples.

Sujet 3 : Fonction caractéristique.

Fonction caractéristique : définition, propriétés + exemple d'applications.

Sujet 4 : Indépendance de 2 variables aléatoires réelles.

Définition, caractérisations et propriétés.

Sujet 5 : Soient (m, σ) deux réels tels que $\sigma > 0$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \quad \Sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - m)^2 \quad \text{et} \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_n)^2.$$

1) Déterminer les lois des v.a. $n(\overline{X}_n - m)/\sigma^2$ et $n\Sigma_n/\sigma^2$.

2) Le but de cette question est de montrer que les v.a. $\overline{X}_n$ et S_n^2 sont indépendantes.

   a) Montrer que le vecteur $(X_1 - \overline{X}_n, \ldots, X_n - \overline{X}_n, \overline{X}_n)$ est un vecteur gaussien.
   b) Montrer que pour tout $1 \leq j \leq n$, les variables $X_j - \overline{X}_n$ et $\overline{X}_n$ sont non corrélées.
   c) En déduire que la variable aléatoire $\overline{X}_n$ est indépendante du vecteur $(X_1 - \overline{X}_n, \ldots, X_n - \overline{X}_n)$. Puis conclure.

3) Le but de cette question est de montrer que $\frac{n-1}{\sigma^2}S_n^2$ suit une loi du χ^2 dont on déterminera le paramètre. On peut montrer (ADMIS) l'égalité suivante :

$$(n-1)S_n^2 + n(\overline{X}_n - m)^2 = \sum_{j=1}^{n}(X_j - m)^2 \qquad (\star)$$

En utilisant $(\star)$, déterminer la fonction caractéristique de $\frac{n-1}{\sigma^2}S_n^2$ puis conclure.

Sujet 6 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité.

1) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants tels que : pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{P}(A_n) = 1/n$.
Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A="tous les A_n sont réalisés",

b) B="au moins un A_n est réalisé",

c) C="une infinité de A_n sont réalisés",

d) D="un nombre fini de A_n est réalisé".

2) a) Soit $(C_m)_{m\geq 1}$ une suite d'évènements de $\mathcal{F}$ tels que $\mathbf{P}(C_m) = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que l'on a : $\mathbf{P}\big(\bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} C_m\big) = 1$.

b) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

i) Montrer que

$$\big\{\omega \in \Omega;\ (X_n(\omega)) \text{ converge vers } 0\big\} = \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{k\geq n} \{\omega \in \Omega;\ |X_k(\omega)| < 1/p\}.$$

ii) En utilisant les questions précédentes, donner (en justifiant) une condition suffisante sur "le comportement de la série $\sum_{n\geq 0} \mathbf{P}(|X_n| \geq \epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$" assurant que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge $\mathbf{P}$-presque sûrement vers 0.

Sujet 7 : Le problème des anniversaires.

Le problème des anniversaires se formule de la manière suivante. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, 2, \cdots, N\}$ avec $N \geq 3$. On s'intéresse à la variable aléatoire

$$T_N = \inf\Big\{k \geq 2 \ \ / \ X_k \in \{X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}\}\Big\}.$$

1) Montrer que $\mathbf{P}(T_N = 2) = 1/N$ et $\mathbf{P}(T_N = N + 1) = N!/N^N$.

2) Montrer que, pour tout $2 \leq k \leq N$,

$$\mathbf{P}(T_N > k) = \frac{N!}{N^k(N-k)!} = \prod_{i=1}^{k-1}\Big(1 - \frac{i}{N}\Big).$$

3) Une classe est constituée de 30 élèves dont aucun n'est né une année bissextile. On suppose que les dates d'anniversaires des élèves sont indépendantes et uniformément réparties sur les 365 jours de l'année. Trouver la probabilité que les anniversaires tombent tous un jour différent.

4) Pour $2 \leq k \leq N + 1$, calculer $\mathbf{P}(T_N = k)$. Puis si $k > N$, calculer $\mathbf{P}(T_N > k)$ et $\mathbf{P}(T_N = k)$.

5) **Indication :** Pour cette question, on pourra utiliser (SANS démonstration), le résultat suivant :

$$\text{pour tout } 0 < x < 1/2, \quad -x - x^2 \leq \log(1 - x) \leq -x.$$

a) Montrer que pour tout $t > 0$, $\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(T_N > t\sqrt{N}) = \exp(-t^2/2)$.

b) En déduire que : $\dfrac{T_N}{\sqrt{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}} T$ où T suit la loi de Rayleigh $\mathcal{R}(1)$ c'est-à-dire la loi dont la densité de probabilité f_T est donnée par

$$f_T(x) = \begin{cases} x \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2}\Big) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sujet 8 : Convergences.

On considère ici deux suites de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Soient X et Y deux v.a.r. qui sont aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Démontrer les propriétés suivantes sur les convergences lorsque $n \to +\infty$:

a) Si $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\text{p.s.}} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X + Y$.

b) Si $X_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{L}^1} X + Y$.

c) Si $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X + Y$.

d) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$ où a est une constante réelle alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + a$. Voici des indications pour la démonstration :
si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et bornée par C, montrer que l'on pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\Big|\mathbf{E}\left[g(X_n + Y_n) - g(X + a)\right]\Big| &\leq \Big|\mathbf{E}\left[g(X_n + Y_n) - g(X_n + a)\right]\Big| + \Big|\mathbf{E}\left[g(X_n + a) - g(X + a)\right]\Big| \\ &\leq 2C\mathbf{P}\big[|Y_n - a| \geq \varepsilon\big] + \mathbf{E}\big[|g(X_n + Y_n) - g(X_n + a)|\mathbf{1}_{|Y_n - a| < \varepsilon}\big] \\ &\qquad + \Big|\mathbf{E}\left[g(X_n + a) - g(X + a)\right]\Big|\end{aligned}$$

puis montrer que chacun des 3 termes de cette dernière somme converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Sujet 9 : Convergences en loi.

On considère ici deux suites de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Soient X et Y deux v.a.r. qui sont aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.
On suppose qu'il existe une v.a.r. X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ telle que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

1) On suppose de plus qu'il existe une constante réelle a telle que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$.
Démontrer que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + a$.

Indications : Voici des indications pour la démonstration :

si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et bornée par C, vérifier que l'on les 2 inégalités suivantes pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\Big|\mathbf{E}\left[g(X_n + Y_n) - g(X + a)\right]\Big| &\leq \Big|\mathbf{E}\left[g(X_n + Y_n) - g(X_n + a)\right]\Big| + \Big|\mathbf{E}\left[g(X_n + a) - g(X + a)\right]\Big| \\ &\leq 2C\mathbf{P}\big[|Y_n - a| \geq \varepsilon\big] + \mathbf{E}\big[|g(X_n + Y_n) - g(X_n + a)|\mathbf{1}_{|Y_n - a| < \varepsilon}\big] \\ &\qquad + \Big|\mathbf{E}\left[g(X_n + a) - g(X + a)\right]\Big|\end{aligned}$$

puis démontrer que chacun des 3 termes de cette dernière somme converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

2) On suppose ici qu'il existe une v.a.r. Y définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ telle que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$.

a) De plus si les suites $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ sont indépendantes, démontrer que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$ avec X et Y indépendantes.

b) Si les suites (X_n) et (Y_n) ne sont pas indépendantes, la conclusion précédente est-elle encore vraie ? Justifiez.

Sujet 10 : Une autre version de la loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$.
On suppose qu'elles sont de carrés intégrables, 2 à 2 non corrélées et telles que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}[X_j] \longrightarrow \mu \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}(X_j) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Démontrer que la suite $\overline{X}_n := \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j$ converge en probabilité vers μ.

Sujet 11 : Jeux de pile ou face.

Un joueur effectue une suite de parties de pile ou face indépendantes, avec probabilité $0 < p < 1$ d'obtenir pile à chaque partie. Soit $n \geq 1$ un entier. Le joueur peut choisir entre deux jeux :

- **Jeu 1 :** le joueur effectue $2n - 1$ parties. Il est déclaré vainqueur s'il obtient au moins n fois pile.
- **Jeu 2 :** le joueur effectue $2n$ parties. Il est déclaré vainqueur s'il obtient au moins $n + 1$ fois pile. De plus, s'il obtient n fois pile exactement, on tire au sort et il est déclaré vainqueur avec probabilité $1/2$.

On note X (resp. Y) le nombre de piles obtenus lorsque le joueur choisit le Jeu 1 (resp. le Jeu 2).
On note v_1 la probabilité de gagner au Jeu 1 et v_2 la probabilité de gagner au Jeu 2.

1) Identifier les lois de X et de Y et en déduire une expression pour v_1 et v_2.

2) Montrer que $\mathbf{P}(Y > n) = \mathbf{P}(X > n) + p\,\mathbf{P}(X = n)$.

3) Vérifier que : $\quad v_1 - v_2 = (1 - p)\,\mathbf{P}(X = n) - \dfrac{1}{2}\mathbf{P}(Y = n)$.

4) Vaut-il mieux jouer au Jeu 1 ou au Jeu 2 ?

Sujet 12 : Autour des Variables aléatoires gaussiennes.

1) Soient X et Y deux v.a.r. définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.
On suppose qu'elles sont indépendantes et toutes deux suivent la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Démontrer que la variable XY a même loi que $V := \dfrac{1}{2}(X^2 - Y^2)$.

Indication : On pourra penser notamment à utiliser la formule de polarisation suivante :

$$XY = \frac{1}{4}\big((X + Y)^2 - (X - Y)^2\big).$$

2) Cette question est indépendante de la précédente !
On suppose que $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs ou nuls. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. gaussiennes telles que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\text{la suite } (X_n)_n \text{ converge en loi } \iff \text{la suite } (\sigma_n^2) \text{ converge.}$$

Que peut-on dire dans le cas de la convergence L^2?

Sujet 13 : Théorème de Bernstein.

1) soit (Y_n) une suite de v.a. réelles convergeant en probabilité vers une constante a, et soit f une fonction continue en a. Montrer que la suite $(f(Y_n))$ converge en probabilité vers la v.a. constante $f(a)$.

2) Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère la suite de polynômes

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Pour $x \in [0,1]$, soit $(X_n(x))$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant toutes même loi de Bernoulli de paramètre x. Soit $S_n(x) = X_1 + \ldots + X_n$ $(n \geq 1)$.

a) Calculer l'espérance de $f(S_n(x)/n)$ puis démontrer que la suite (P_n) converge simplement vers f.

b) Soit $\varepsilon > 0$, et $\alpha > 0$ tel que pour tout x, y, $|x-y| \leq \alpha$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. En écrivant

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[|f(S_n(x)/n) - f(x)|\big] =& \mathbf{E}\left[|f(S_n(x)/n) - f(x)|\, \mathbf{1}_{|(S_n(x)/n)-x|\leq\alpha}\right] \\ &+ \mathbf{E}\left[|f(S_n(x)/n) - f(x)|\, \mathbf{1}_{|(S_n(x)/n)-x|>\alpha}\right],\end{aligned}$$

en majorant le premier terme de droite par ε et le deuxième à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que (P_n) converge vers f uniformément sur $[0,1]$.