Concours Agrégation, Mathématiques générales, 2014-2015

Leçon 03- Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.

Commentaires du jury 2015 :

Les candidats parlent de groupe simple et de sous-groupe dérivé ou de groupe quotient sans savoir utiliser ces notions. Entre autres, il faut savoir pourquoi on s'intéresse particulièrement aux groupes simples. La notion de produit semi-direct n'est plus au programme, mais lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple). On pourra noter que les tables de caractères permettent d'illustrer toutes ces notions. Pour les candidats les plus téméraires, on pourra noter que le treillis des sous-groupes distingués d'un groupe fini se voit dans sa table de caractères, ainsi que l'indice du sous-groupe dérivé.

Commentaires du jury 2016 :

Dans cette leçon, il faut non seulement évoquer les notions de groupe quotient, de sous-groupe dérivé et de groupe simple mais surtout savoir les utiliser et en expliquer l'intérêt. On pourra utiliser des exemples issus de la géométrie, de l'arithmétique, de l'algèbre linéaire (utilisation d'espaces vectoriels quotients par exemple). La notion de produit semi-direct n'est plus au programme ; mais, lorsqu'elle est utilisée, il faut savoir la définir proprement et savoir reconnaître des situations simples où de tels produits apparaissent (le groupe diédral D_n par exemple). S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions à l'aide d'une table de caractères et décrire le treillis des sous-groupes distingués, ainsi que l'indice du sous-groupe dérivé, d'un groupe fini à l'aide de cette table.

Remarque : Il faut savoir montrer que les classes à gauches modulo un sous-groupes sont en bijection avec les classes à droites même dans le cas où le groupe n'est pas fini. Penser à parler du groupe dérivé et de sa propriété universelle (donner des exemples ..), application aux représentations de degré 1. Parler du normalisateur d'un sous-groupe.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. A.] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)
[Fr. E.] Fresnel J. *Groupes* (Hermann 2001)

Développements conseillés :

(1) Produit semi-direct, [F. M. 1] $n°54$ (les exemples sont de bons exercices de révision et peuvent utilement illustrer la leçon)

(2) Groupes simples d'ordre 60, [F. M. 2] p. 146. Pensez à avoir sous la main une preuve du fait que A_5 est simple, [F. M. 1] p. 166.

(3) Le groupe dérivé de $GL(n, K)$ est $SL(n, K)$ (sauf exception), [Fr. A.] th. 2.2.3.7. p. 114

(4) Indice d'un sous-groupe distingué et applications, [Fr. E.] Exer. 8.5 p. 83 et [F. M. 1] $n°55$. Pour le lien entre sous-groupes distingué d'un groupe fini et table des caractères voir [F. M. 2] p. 166.

Exercice 0 Montrer que pour $n > 1$ le seul sous-groupe d'indice fini de $SO_n(R)$ est $SO_n(R)$, [F. M. 1] $n°78$

Exercice 1 Sur les p-groupes, [F. M. 1] $n°77$

Exercice 2 Le groupe de Frattini d'un p-groupe, [F. M. 1] n°76

Exercice 3 Sur les sous-groupes d'indice 2, [F. M. 1] n°56

Exercice 4 Les groupes d'ordre 12 et leurs représentations irréductibles, [F. M. 2] p. 173.

Exercice 5 Montrer qu'un groupe fini est simple ssi tout caractère irréductible non trivial a un noyau trivial, [F. M. 2] cor.p.167.

Exercice 6 Montrer qu'un groupe simple non abélien d'ordre pair G (un théorème fameux dû à Feit et Thomson montre que c'est toujours le cas) ne possède pas de caractère irréductible de degré 1 ou 2 hormis 1_G (s'inspirer de [F. M. 1], remarque p. 185).

Exercice 7 Commutateurs et groupe dérivé, [F. M. 1] n° 80. Dans les questions 1 et 2 on construit en utilisant les formes quadratiques des groupes finis pour lesquels le groupe dérivé contient strictement l'ensemble des commutateurs (c'est un développement pour les bons que l'on peut réutiliser dans la leçon formes quadratiques et dans la leçon polynômes à plusieurs indéterminées). Dans la question 3 on trouvera des résultats sur les groupes dérivés et ensemble des commutateurs pour les groupes classiques ce qui illustre bien le fait qu'il faut faire un effort pour donner un exemple dans lequel le groupe dérivé contient strictement l'ensemble des commutateurs.