Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 06- Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Commentaires du jury 2015 : Cette leçon est souvent présentée comme un catalogue de résultats épars et zoologiques sur $GL(E)$. Il serait bien que les candidats unifient la présentation de la leçon en faisant correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, À quoi peuvent servir des générateurs du groupe $GL(E)$? etc.). Qu'apporte la topologie dans cette leçon ? Il est préférable de se poser ces questions avant de les découvrir le jour de l'oral. Certains candidats affirment que $GL_n(K)$ est dense (respectivement ouvert) dans $M_n(K)$. Il est judicieux de préciser les hypothèses. La présentation du pivot de Gauss et de ses applications se justifient pleinement. Il faut aussi savoir réaliser S_n dans $GL(n, \mathbb{R})$ et faire le lien entre signature et déterminant. Dans le même ordre d'idée, la théorie des représentations permet d'illustrer, dans les leçons plus robustes, l'omnipotence de $GL_n(\mathbb{C})$ et de son sous-groupe unitaire.
Commentaires du jury 2016 : Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $GL(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). On doit présenter des systèmes de générateurs, étudier la topologie et préciser pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de Gauss sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser S_n dans $\mathrm{GL}(n, K)$ et faire le lien entre signature et déterminant. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et de son sous-groupe unitaire.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. A.] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)

Développements conseillés :

(1) Sous-groupes distingués de $GL(E)$ [Fr. A.] p.118. Commentaire : on caractérise les sous-groupes de $GL_n(K)$ qui sont invariants par la conjugaison par les éléments de $SL_n(K)$.

A. En particulier si G est un sous-groupe distingué de $SL_n(K)$ c'est aussi un sous-groupe de de $GL_n(K)$ invariant par la conjugaison par les éléments de $SL_n(K)$. Ainsi si $n > 2$ ou si $n = 2$ et K différent de $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$ alors G est inclus dans $Z(\mathrm{GL}_n(K))$ ou bien G contient $\mathrm{SL}_n(K)$ .Notez que $Z(\mathrm{GL}_n(K)) = K^\star Id$ et $Z(\mathrm{GL}_n(K))$ intersection $SL_n(K) = \mu_n(K)Id$ où $\mu_n(K) = \{a \in K, a^n = 1\}$ Ainsi si π est la surjection canonique de $SL_n(K)$ dans $PSL_n(K) = \mathrm{SL}_n(K)\ mod\ Z(\mathrm{GL}_n(K)) \cap \mathrm{SL}_n(K)$. Si H est un sous-groupe distingué de $PSL_n(K)$ alors $G := \pi^{-1}(H)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SL}_n(K)$ et donc G est inclus dans $Z(\mathrm{GL}_n(K))$ ou bien G contient $\mathrm{SL}_n(K)$ par suite $\pi(H) = 1$ ou bien $PSL_n(K)$.

B. Si G est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(K)$ il est en particulier invariant par la conjugaison par les éléments de $\mathrm{SL}_n(K)$ et donc G est soit inclus dans $Z(\mathrm{GL}_n(K))$ auquel cas $G = CId$ où C est un sous-groupe de $K^\star$, soit G contient $\mathrm{SL}_n(K)$. Dans ce dernier cas l'homomorphisme $\det \mathrm{GL}_n(K) ---> K^\star$ montre que G décrit les images réciproques des sous groupes de $K^\star$.

(2) Sur l'isomorphisme entre $GL_n(K)$ et $GL_m(K)$ en toutes caractéristiques, [F. M. 2] p.63.

(3) Action à gauche des groupes $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$, sur $M_{n,p}(K)$ et matrices échelonnées, [Fr. A.] thm p. 48 .Ce développement peut être aussi utilisé dans la leçon opérations sur les espaces de matrices ou "Systèmes linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques."

(4) Comptage des matrices de $M_n(\mathbb{F}_q)$ de rang n-1 et des matrices nilpotentes de rang n-1, [F. M. 2] p. 10. Ce développement est utilisable dans plusieurs leçons.

(5) Les sous-groupes abéliens finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, [F. M. 2] p.130, (notez que la preuve marche aussi pour les sous-groupes abéliens d'exposant fini). Ce développement peut-être utilisé dans les leçons – Endo diagonalisable – Groupes finis – Groupe linéaire – Familles génératrices d'un groupe -Représentations linéaires . . . .

Exercice 1 Orbites de l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $L_K(E,F)$ par multiplication à gauche et sous-espaces vectoriels de E. Exercice corrigé.

(1) Applications linéaires et théorème de factorisation.

Soient E, F, 2 K-espaces vectoriels de dimension respectives p et n et $L_K(E,F)$, le K-espace vectoriel des applications linéaires de E dans F. On considère l'action de groupe $(w,v) \in \mathrm{GL}(F) \times L_K(E,F) \to w \circ v \in L_K(E,F)$. Montrer que $u, v \in L_K(E,F)$ sont dans la même orbite si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$.

Preuve. On note $F' := \operatorname{Im} v$ *et* $v' : E \to F'$ *avec* $v'(x) = v(x)$, $\forall x \in F'$. *Alors* $\operatorname{Ker} v' = \operatorname{Ker} v$. *Puisque* v' *est surjective, par le théorème de factorisation des applications linéaires ([Fr. A.] p. ? ?) il existe une et une seule application* K*-linéaire* $w' : F' \to F$ *avec* $w' \circ v' = u$ *si et seulement si* $\operatorname{Ker} v' \subset \operatorname{Ker} u$.

Ainsi si il existe $w \in L_K(E,F)$ *avec* $u = w \circ v$, *alors* $u = w' \circ v'$ *où* $w' := w_{\|F'}$ *et donc* $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} v' \subset \operatorname{Ker} u$.

Réciproquement si $w' \in L_K(F', F)$ *avec* $u = w' \circ v'$, *il suffit de prolonger* w' *à* F. *Pour cela on choisit un supplémentaire* S *de* F' *dans* F *et si* f_i, $1 \le i \le s$ *est une base de* S *on définit* w *par* $w(f' + \sum_{1\le i\le s} \lambda_i f_i) := w'(f) + \sum_{1\le i \le s} \lambda_i g_i$, $\forall f' \in F'$ *où les* $g_i \in F$ *sont arbitraires.*

Si de plus on veut que $w \in \mathrm{GL}(F)$ *i.e.* w *injective. une condition nécessaire est que* $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u$ *et c'est aussi une condition suffisante puisqu'alors* $u = v$ *et donc* $F = \operatorname{Im} u \bigoplus T$ *avec* $\dim T = \dim S$ *et il suffit d'imposer aux* $g_i = w(f_i)$, $1 \le i \le s$ *d'être une base de* T. */ / /*

(2) En déduire que les orbites sont en bijection avec les sous-espaces vectoriels V de E de dimension $\ge \dim E - \dim F$.

Preuve. Par la question précédente l'application qui à $v \in L_K(E,F)$ *associe* $\operatorname{Ker} v \subset E$ *définit par passage au quotient ensembliste une application injective de l'ensemble des orbites dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de* E *de dimension* $\ge \dim E - \dim F$ *(théorème du rang). Il suffit de montrer qu'elle est surjective. Si* $V \subset E$ *est un sous-espace vectoriel de* E *avec* $\dim V \ge \dim E - \dim F$, *soit* S *un supplémentaire de* V, *alors* $s := \dim S = \dim E - \dim V \le \dim F$, *ainsi il existe* $(g_i)_{1 \le i \le s}$ *une famille libre de* F *et si* $(f_i)_{1\le i\le s}$ *est une base de* S *alors l'application linéaire* v *avec* $v(x) = 0$, $\forall x \in V$ *et* $v(f_i) = g_i$ *pour* $1 \le i \le s$ *est telle que* $\operatorname{Ker} v = V$.

Remarque. Si $\dim E \le \dim F$, *il n'y a pas de condition de dimension pour les sous-espaces vectoriels* V *de* E. */ / /*

Exercice 2 Orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $M_{n,p}(K)$ par la multiplication à gauche, matrices échelonnées normalisées et sous-espaces vectoriels de K^n (version matricielle de l'exercice précédent). Exercice corrigé.

Rappel, [Fr. A.] p. 47-49.

Les matrices échelonnées normalisées sont les matrices $N(a) = [C_1, C_2, ..., C_p] \in M_{n,p}(K)$ de rang r telles que les colonnes C_{j_k}, $1 \le i \le r$ avec $j_1 < j_2 < ... < j_{r-1}$ sont les r premiers vecteurs de la base canonique $(e_i)_{1\le i\le n}$ de K^n, $C_{j_r} = ae_{j_r}$ avec $a = 1$ si $r < n$ et $a \in K_{\{}0\}$ si $r = n$. Les autres colonnes étant sujettes à la règle suivante : $C_i = 0$ pour $1 \leq i \leq j_1$, $(C_j,\ j_k \leq i \leq j_{k+1}) \in \bigoplus_{1\leq i\leq k} Ke_i$ et enfin $(C_j,\ j_r \leq i) \in \bigoplus_{1\leq i\leq r} Ke_i$.

Dans ce qui suit les matrices "échelonnée normalisées unité "sont les matrices échelonnées normalisées avec $a = 1$. Dans [Fr. A.] p. 47-49, on montre que les matrices échelonnées normalisées forment un système de représentants des orbites de l'action de $\mathrm{SL}_n(K)$ sur $M_{n,p}(K)$ par la multiplication à gauche.

On va montrer que les matrices "échelonnée normalisées unité " forment un système de représentants des orbites de l'action de $\mathrm{SL}_n(K)$ sur $M_{n,p}(K)$ par la multiplication à gauche.

(1) Soit $A \in M_{n,p}(K)$ avec , montrer que les orbites de A sous $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$ coïncident.

Preuve. En effet $\mathrm{SL}_n(K)A = \mathrm{SL}_n(K)N_r(1)$ *où* $N_r(1)$ *est le représentant échelonné normalisé avec* $a = 1$ *puisque* $(A) < n$. *Soit* $b \in K^\times$ *et* $D_n(b)$ *la dilatation de diagonale* $(1, ..., 1, b)$*, alors* $N_r(1) = D_n(b)N_r(1)$ *; ainsi* $\mathrm{SL}_n(K)N_r(1) = \mathrm{SL}_n(K)D_n(K^\times)N_r(1)$ *et donc* $\mathrm{SL}_n(K)N_r(1) = \mathrm{GL}_n(K)N_r(1)$ *et* $\mathrm{GL}_n(K)A = \mathrm{SL}_n(K)A$. *///*

(2) Soit $A \in M_{n,p}(K)$ avec $(A) = n$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ avec $PA = N$ échelonnée normalisée unité.

Preuve. Comme rappelé au-dessus il existe $S \in \mathrm{SL}_n(K)$ *avec* $SA = N_n(a)$ *échelonnée normalisée. Ainsi* $P := D_n(\frac{1}{a})$ *convient.*

(3) Mêmes notations que précédemment. Montrer l'unicité d'un représentant échelonné normalisé unité dans l'orbite $\mathrm{GL}_n(K)A$).

Preuve. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ *avec* $PA = N_n(1)$*, alors* $D_n(\frac{1}{\det P})PA = D_n(\frac{1}{\det P})N_n(1)$ *est échelonnée normalisée et* $S := D_n(\frac{1}{\det P})P \in \mathrm{SL}_n(K)$. *Ainsi* $D_n(\frac{1}{\det P})N_n(1) = N_n(a)$ *est* **le** *représentant échelonné normalisé dans l'orbite* $\mathrm{SL}_n(K)A$. *///*

(4) Montrer par un procédé algorithmique que deux matrices échelonnées normalisées unité sont égales si et seulement si elles ont le même noyau. Ainsi on retrouve la bijection entre les orbites sous $\mathrm{GL}_n(K)$ des matrices de $M_{n,p}(K)$ et les sous-espaces vectoriels V de K^p avec $\dim V \geq p - n$; précisément si $A \in M_{n,p}(K)$ l'espace V correspondant est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $A(x_1, x_2, ..., x_p)^t = 0$.

Preuve. Soient donc $N = (n_{i,j}$ *et* $N' = (n'_{i,j}$ *deux matrices échelonnées normalisées unité de rang* r *resp.* r' *avec* $\mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Ker}\, N'$. *Par le théorème du rang on a* $r = r'$. *On note* C_{j_k}, $1 \leq k \leq r$ *resp.* $C'_{j'_k}$, $1 \leq k \leq r$ *la colonne de* N *resp.* N' *qui est égale à* e_k.

Ainsi $e_1, ..., e_{j_1-1} \in \ker N$ *d'où* $j'_1 \geq j_1$ *et par symétrie* $j'_1 = j_1$.

Soit $j_1 < j < j_2$*, montrons que* $n_{1,j} = n'_{1,j}$ *et* $n_{i,j} = n'_{i,j}$ *si* $i > 1$. *Pour cela on remarque que* $n_{1,j}e_{j_1} - e_j \in \mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Ker}\, N'$*, il suit que* $0 = N'({}_{1,j}e_{j_1} - e_j) == (n_{1,j} - n'_{1,j})e_1 + \sum_{i>1} n'_{i,j}e_i$ *d'où le résultat. Il suit en sus de cela que* $j'_2 \geq j_2$ *avec égalité par symétrie.*

Si $j_2 < j < j_3$*, alors* $n_{1,j}e_{j_1} + n_{2,j}e_{j_2} - e_j \in \mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Ker}\, N'$ *et donc* $0 = (n_{1,j} - n'_{1,j})e_1 + (n_{2,j} - n'_{2,j})e_2 + \sum_{i>2} n'_{i,j}e_i$ *...etc... ./{}//*

Exercice 3 Sur la connexité des matrices de rang r, [Fr. A.] p. 130, (pour répondre au souhait du jury de parler de topologie et d'utilisation des générateurs). Exercice corrigé.

On munit $M_n(\mathbb{C})$ de sa topologie de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

(1) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Preuve. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est l'image réciproque par l'application déterminant* $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *de l'ouvert* $\mathbb{C} - \{0\}$ *de* $\mathbb{C}$. *Puisque* $\det$ *est une fonction polynôme sur* $M_n(\mathbb{C})$ *donc continue, il suit que* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est ouvert dans* $M_n(\mathbb{C})$. *Enfin si* $M \in M_n(\mathbb{C})$ *le polynôme caractéristique* $\chi_M(X) := \det(XI_n - M)$ *est un polynôme unitaire de degré* n*, ainsi pour* $k \in \mathbb{N}$ *suffisament grand* $\chi_M(1/k) \neq 0$ *ainsi* M *est limite de la suite* $M - \frac{1}{k}I_n \in \mathrm{GL}_n(K)$. *///*

(2) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Preuve. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*, on va construire un chemin (continu) dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *de* I_n *à* A *ce qui montrera que la composante connexe de l'identité dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*. Pour cela on écrit* $A = \prod_{k\in I} T_k D(\det A)$ *avec* $T_k = B_{i_k,j_k}(\lambda_k)$*. L'application* $t \in [0,1] \to \prod_{k\in I} B_{i_k,j_k}(t\lambda_k)$ *fournit un chemin continu dans* $\mathrm{GL}_n(K)$ *de* $D(\det A)$ *à* A*. Ensuite on écrit* $\det A = \rho e^{i\theta}$ *avec* $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$ *et* $\theta \in [0, 2\pi[$*, alors l'application* $t \in [0,1] \to D((1-t+t\rho)e^{it\theta})$ *fournit un chemin continu dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *de* I_n *à* $D(\det A)$*. ///*

(3) Soit $r < n$ et N_r le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{C})$ des matrices de rang $\leq r$.

(a) Montrer que N_r est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$.

Preuve. Une matrice $A \in N_r$ *si et seulement si ses mineurs de taille* $> r$ *sont nuls, c'est une condition fermée sur* $M_n(\mathbb{C})$ *puisque* det *est une fonction polynôme. ///*

(b) Montrer que $N_r - N_{r-1}$ est un ouvert connexe de N_r.

Preuve. D'abord $N_r - N_{r-1}$ *est un ouvert par la question précédente. Soit* $J_r := \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in N_r - N_{r-1}$ *alors* $N_r - N_{r-1}$ *est l'image continue du connexe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *par l'application* $(P,Q) \to PJ_rQ$*. ///*

Exercice 4 Applications multiplicatives sur les matrices, [Fr. A.] p. 93. Exercice corrigé.

Soit K un corps commutatif et $f : M_n(K) \to K$, une application non constante avec $f(AB) = f(A)f(B)$ pour tout $A, B \in M_n(K)$. On suppose $n > 1$.

(1) Montrer que $f(I_n) = 0$ ou 1, conclure que $f(I_n) = 1$ et que $f(M) \neq 0$ pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Preuve. On a $f(I_nI_n) = f(I_n)f(I_n)$*, ainsi* $f(I_n) = 0$ *ou* 1*. Si* $f(I_n) = 0$*, il suit que* $f(A) = f(AI_n) = 0$ *et donc* f *est une application constante (contradiction). Si* $M \in \mathrm{GL}_n(K)$*, alors* $1 = f(I_n) = f(M)f(M^{-1})$ *ainsi* $f(M) \neq 0$*. ///*

(2) Montrer que $f(0) = 0$ ou 1. En supposant que $f(0) = 1$ montrer que $f(M) = 1$ pour tout $M \in M_n(K)$. En déduire que $f(0) = 0$.

Preuve. On a $f(0) = f(0)f(0)$*, ainsi* $f(0) = 0$ *ou* 1*. On suppose que* $f(0) = 1$*, alors* $1 = f(0) = f(0M) = f(0)f(M) = f(M)$ *et* f *est une application constante (contradiction). ///*

(3) Soit $M \in M_n(K)$ avec rang de M égal $r < n$. Montrer que M est équivalente modulo $\mathrm{GL}_n(K)$ à une matrice nilpotente. Conclure que $f(M) = 0$.

Preuve. Les matrices équivalentes sont caractérisées par leur rang. Puisque $r < n$ *on peut considérer la matrice* $J_r := \sum_{1\leq i\leq r} E_{i,i+1}$*, son image est de dimension* r *et un calcul immédiat donne* $J_r^n = 0$ *(on peut aussi utiliser Cayley-Hamilton ...). Ainsi* $M = PJ_rQ$ *avec* $P, Q \in GL_n(K)$ *et donc* $f(M) = f(P)f(J_r)f(Q) = f(J_r)$*. Mais* $f(J_r)^n = f(J_r^n) = 0$ *et donc* $f(M) = 0$*. ///*

(4) On veut montrer que $f(\mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}$.

(a) Pour $\lambda \in K - \{0\}$ et $i \neq j$, on note $B_{i,j}(\lambda) := Id + \lambda E_{i,j}$. Pour σ une permutation de $\{1, ..., n\}$ on note $Q(\sigma) \in M_n(K)$ telle que $Q(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ où $(e_i)_i$ est la base canonique de K^n. Enfin si $\mu \in K - \{0\}$, on note $D(\mu)$ la matrice avec $D(\mu)(e_2) = \mu e_2$ et $D(\mu)(e_i) = e_i$ pour $i \neq 2$. Montrer que $Q(\sigma)E_{i,j}Q(\sigma)^{-1} = E_{\sigma(i),\sigma(j)}$ et que $D(\mu)E_{2,1}D(\mu)^{-1} = \mu E_{2,1}$. En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ avec $B_{i,j}(\lambda) = PB_{2,1}(1)P^{-1}$.

Preuve. On évalue $Q(\sigma)E_{i,j}Q(\sigma)^{-1}(e_{\sigma(k)}) = Q(\sigma)E_{i,j}(e_k) = \delta_{k,j}e_{\sigma(i)}$ *et donc* $Q(\sigma)E_{i,j}Q(\sigma)^{-1} = E_{\sigma(i),\sigma(j)}$*. L'égalité* $D(\mu)E_{2,1}D(\mu)^{-1} = \mu E_{2,1}$ *est immédiate. Soit* σ *une permutation de* $\{1, ..., n\}$ *avec* $\sigma(1) = i$ *et* $\sigma(2) = j$ *(on complète par une bijection entre les complémentaires), alors* $Q(\sigma)E_{i,j}Q(\sigma)^{-1} = E_{1,2}$ *et pour* $\mu := 1/\lambda$*, on a* $D(\mu)Q(\sigma)(\lambda E_{i,j})Q(\sigma)^{-1}D(\mu)^{-1} = E_{1,2}$*, ainsi* $P = D(\mu)Q(\sigma)$ *convient. On vient ainsi de vérifier que la réduction de Jordan de* $B_{i,j}(\lambda)$ *est* $B_{2,1}(1)$*. Il suit que* $f(B_{i,j}(\lambda) = f(B_{2,1}(1))$*. ///*

(b) On suppose que $K \neq \mathbb{F}_2$. Montrer qu'il existe $a \in K - \{0,1\}$ avec $B_{2,1}(1) = B_{2,1}(a)B_{2,1}(1-a)$. En déduire que $f(B_{2,1}(1)) = 1$ puis que $f(\mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}$.

Preuve. Soit $a \in K - \{0,1\}$, *alors* $B_{2,1}(a)B_{2,1}(1-a) = B_{2,1}(a+1-a) = B_{2,1}(1)$. *Ainsi avec la question précédente on déduit que* $f(B_{2,1}(1)) = f(B_{2,1}(1))^2$ *et donc* $f(B_{2,1}(1)) = 1$ *(*$B_{2,1}(1)$ *est inversible). Puisque* $\mathrm{SL}_n(K)$ *est engendré par les matrices élémentaires de transvection il suit que* $f(\mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}$. *///*

(c) On suppose que $K = \mathbb{F}_2$. Montrer que $f(B_{i,j}(\lambda)) = Id$ pour $\lambda \in K$. En déduire que $f(\mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}$.

Preuve. Si $K = \mathbb{F}_2$, $f(B_{i,j}(\lambda)^2) = f(B_{i,j}(2\lambda)) = f(I_n) = 1$ *(on utilise que la caractéristique est* 2*) et on conclut comme précédemment. ///*

(5) Montrer qu'il existe $\rho : K^\times \to K^\times$, un homomorphisme avec $f(A) = \rho(\det(A))$ pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.
Preuve. f *induit un homomorphisme de groupes* $GL_n(K) \to K^\times$, *et* $f(\ker\det) = f(\mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}$, *ainsi le théorème de factorisation fournit un unique homomorphisme de groupes avec* $f = \rho \circ \det$. *///*

Exercice 5 Le normalisateur dans $\mathrm{GL}_n(K)$ du sous-groupe $\mathcal{D}$ matrices diagonales inversibles. Une variante "géométrique" de [Fr. A.] ex. 2.3.4. p. 122.
On suppose que $K \neq \mathbb{F}_2$. Montrer que c'est le sous-groupe de N de $\mathrm{GL}_n(K)$ des matrices qui laissent stable $V := \cup_{1 \le i \le n} K e_i$ où $(e_i)_{1 \le i \le n}$ est la base canonique de K^n.

Preuve. Puisque V est stable par le groupe $\mathcal{D}$ il suit que $N\mathcal{D}N^{-1}$ a la même propriété et ainsi $N\mathcal{D}N^{-1} = \mathcal{D}$; ainsi N est dans le normalisateur dans $GL_n(K)$ du sous-groupe $\mathcal{D}$. Réciproquement soit $P \in GL_n(K)$ est tel que $P\mathcal{D}P^{-1} = \mathcal{D}$. Si $|K| > n$ soit D une matrice diagonale inversible avec $d_{i,i} \neq d_{j,j}$ si $i \neq j$, alors $DP = PD'$ avec $D' \in \mathcal{D}$. Ainsi $D(P(e_i)) = P(d'_{i,i}e_i)$, ainsi $P(e_i)$ est un vecteur propre de D et donc $P(e_i) \in V$. Dans le cas général il faut se fatiguer un peu plus : soit $a \in K$ avec $a \notin \{0, -1\}$ and $D_i := Id + aE_{i,i}$ pour $1 \le i \le n$. Comme précédemment $D_iP = PD'_i$ avec $D'_i \in \mathcal{D}$. Supposons que $P(e_1) \notin V$ puisque $P(e_1)$ est un vecteur propre de D_i et que $P(e_1) \notin Ke_i$, il suit que $P(e_1) \in \bigoplus_{j \neq i} Ke_j$ et donc $e_i^\star(P(e_1)) = 0$; ainsi $P(e_1) = 0$, ce qui est absurde.

Exercice 6 Le groupe des matrices inversibles réelles à coefficients positifs ou nuls. Une variante "géométrique" de [Fr. A.] ex. 2.3.17. p. 131.
On se propose d'étudier le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} ont leurs coefficients ≥ 0. Soit $C := \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $x_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq n\}$., alors G opère naturellement sur le cône C.

(1) Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in C$. On suppose que l'équation $x = y + z$ avec $y, z \in C$ implique y et z sont colinéaires ; montrer alors que $x \in \cup_{1 \le i \le n} \mathbb{R}^+ e_i$.
(2) Retrouver ainsi le fait que dans chaque ligne et chaque colonne de $M \in G$ il y a un et un seul coefficient non nul.

Exercice 7 Groupe des commutateurs, [Fr A.] p. 114 peut faire un développement

Exercice 8 Isomorphismes exceptionnels, [F. M. 2] p. 59 et [F. M. 1] $n°75$.

Exercice 9 $PSL_3(\mathbb{F}_4)$ et $PSL_4(\mathbb{F}_2)$ sont simples de même cardinal et non isomorphes, [Fr. A.] p. 124.

Exercice 10 Signature de $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ et carrés dans $\mathbb{F}_q^\times$, [F. M. 1] $n°72$ question 1.1. p. 176

Exercice 11 Sur les sous-groupes cycliques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ d'ordre $q^n - 1$, [F. M. 2] p. 53.