Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 07- Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Commentaires du jury 2015 :
Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. Le candidat doit, d'une part, savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes. Il doit, d'autre part, savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et savoir également trouver la table de caractères de certains sous-groupes. On voit souvent dans les développements qu'un candidat qui sait manier les techniques de base sur les caractères ne sait pas forcément relier ceux-ci aux représentations. Le caractère est un outil puissant, mais il reste un outil, ce n'est pas l'intérêt ultime de la leçon. Dans le même ordre d'idée, le lemme de Schur est symptomatique d'une confusion : dans le cas où les deux représentations V et V_1 sont isomorphes, on voit que les candidats confondent isomorphisme de V dans V_1 avec endomorphisme de V . Ce qui revient implicitement à identifier V et V_1, ce que le candidat devrait faire de façon consciente et éclairée.

Commentaires du jury 2016 : Il s'agit d'une leçon où théorie et exemples doivent apparaître. D'une part, il est indispensable de savoir dresser une table de caractères pour des petits groupes, et d'autre part, il faut savoir tirer des informations sur le groupe à partir de sa table de caractères, et être capable de trouver la table de caractères de certains sous-groupes. Les représentations peuvent provenir d'actions de groupes sur des ensembles finis, de groupes d'isométries, d'isomorphismes exceptionnels entre groupes de petit cardinal. Inversement, on peut chercher à interpréter des représentations de façon géométrique, mais il faut avoir conscience qu'une table de caractères provient généralement de représentations complexes à priori non réelles. La présentation du lemme de Schur est importante et ses applications doivent être parfaitement maîtrisées. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer dans la construction de l'icosaèdre à partir de la table de caractères de A_5 en utilisant l'indice de Schur (moyenne des caractères sur les carrés des éléments du groupe).

Remarque : Références : [F. M. 1] n° 82 et Felix Ulmer Théorie des groupes Ellipse p. 150 à 160 (voir en particulier p. 158) et M.P. Malliavin : Les groupes finis et leurs représentations complexes Masson. Plus difficile

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
Compléments et errata, https :Fr.//www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
et
[C. G.] Caldero P., Germoni J. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries* (Calvage Mounet 2016)
[Se 1] Serre J.P. *Représentations linéaires des groupes finis* (Hermann 3ième édition 1978)
[Se 2] Serre J.P. *Finite Groups : An Introduction* (Higher Education Press International Press, 2016). Notez que cet ouvrage à ce jour est épuisé mais c'est la version anglaise d'un cours de J.P. Serre à l'ENSJF en 1974 qui lui est accessible `http://arxiv.org/abs/math/0503154`
[Se 3] Serre J.P. *Topics in Galois theory* (Boston, Jones and Bartlett Publ., 1992)
[Ul] Ulmer F. *Théorie des groupes* (ellipse 20 ? ?)

Développements conseillés :

(1) Relations d'orthogonalité des caractères et isomorphisme de représentations, [F. M. 1] $n^\circ 82$ par. 7 et table des caractères vue comme matrice carrée, [C. G.] Tome 2 p. 469.

(2) Soit G un groupe fini, alors les degrés des représentations irréductibles de G divisent $|G|$, [F. M. 2] p. 168 adapté de [Se 2].

(3) Représentations irréductibles de S_n de degré $n-1$, [F. M. 1] $n°82$ par. 13.7 et [F. M. 2] p.164. Du groupe diédral, [F. M. 1] $n°82$ par. 13.2.
(4) Les représentations irréductibles de S_3, A_4, S_4, $S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (groupe du cube), D_8 et Q_8, [F. M. 1] $n°82$ par. 13, p. 208 + table des caractères à réutiliser dans la leçon ≪Représentations des groupes de petit cardinal≫.

Exercice 0 A propos du commentaire du jury pour la leçon 01 (Actions des groupes ...)≪on pourra noter que l'injection du groupe de permutations dans le groupe linéaire par les matrices de permutations donne lieu à des représentations dont il est facile de déterminer le caractère≫ : voir [F. M. 2] p.164.

Exercice 1 Caractères et sous-groupes distingués, [F. M. 2] p. 116 et [Ul] p. 158.

Exercice 2 Soit G un groupe fini et $g, g' \in G$. Montrer que g, g' sont conjugués dans G si et seulement si $\chi(g) = \chi(g')$ pour tout caractère χ de G. *Indication : Supposons que $g, g' \in G$ ne sont pas dans la même classe de conjugaison; considérer une fonction centrale f sur G avec $f(g) = 0$ et $f(g') = 1$ et utiliser [F. M. 1] n°82 par. 9.2. p. 207.)*

Exercice 3 Montrer que le groupe G est abélien si et seulement si ses caractères irréductibles sont de degré 1 (considérer la représentation régulière de G; elle est fidèle ...), [F. M. 2] p. 171 théorème 3.4 et son corollaire (si A est un sous-groupe commutatif de G alors toute représentation irréductible de G est de degré $\leq |G|/|A|$), la référence originale est [Se 1] p.39.

Exercice 4 Groupes d'ordre 36 et table des caractères. Dans [Ul] p. 159, on trouve la table des caractères d'un groupe d'ordre 36, Ulmer en déduit que l'ordre de $G/D(G)$ est 4 (c'est le nombre de caractères de degré 1). Il liste les noyaux des caractères et en déduit la liste des sous-groupes distingués. On se propose de déterminer la structure de G à partir de la table des caractères (notez que l'on ne se permet pas d'utiliser la ligne 2). On remarque d'abord que $D(G)$ est un 3-Sylow et qu'il est distingué (en fait c'est un groupe caractéristique); notons le G_3. Soit G_2 un 2-Sylow de G, alors $|G_2| = 4$ et puisque $\chi_3(C_5) = i$, il suit que G_2 n'est pas isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; ainsi G_2 est cyclique d'ordre 4. Puisque $G_2 \cap G_3 = \{e\}$, il suit que $G =$ est le produit semi-direct (interne) G_2G_3. Pour caractériser ce produit semi-direct il faut caractériser G_3 ainsi que l'action de G_2 par conjugaison sur G_3. Si G_3 était cyclique il posséderait un unique sous-groupe d'ordre 3 (c'est G_3^3) et ainsi $G_2G_3^3$ serait un sous-groupe distingué de G ce qui est contraire à la liste obtenue. Ainsi G_3 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$; on a donc un homomorphisme $f : G_2 \to AutG_3$ défini par $f(g_2)(g_3) = g_2g_3g_2^{-1}$. D'où un homomorphisme de $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to GL_2(\mathbb{F}_3)$. Soit $g \in Ker\ \varphi$, alors $g \in Z(G)$, or $Z(G)$ est trivial puisque $\ker \chi_5 = \{e\}$, ainsi $Z(G) = \{e\}$ et φ est injectif. Les éléments d'ordre 4 dans $GL_2(\mathbb{F}_3)$ sont les matrices A avec $A^2 = -Id$. Puisque $\mathbb{F}_3$ n'a pas d'éléments d'ordre 4, A n'est pas une homothétie et ainsi A est semblable à la matrice compagne de $X^2 + 1$, ainsi les éléments d'ordre 4 sont conjugués dans $GL_2(\mathbb{F}_3)$; il n'y a donc à isomorphisme près qu'un tel groupe c'est $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ avec $\varphi(1)((1,0)) = (0,1)$ et $\varphi(1)((0,1)) = (-1,0)$.

Exercice 5 Montrer qu'un groupe fini est simple si et seulement si tout caractère irréductible non trivial a un noyau trivial, [F. M. 2] p. 167.

Exercice 6 Montrer qu'un groupe simple non abélien d'ordre pair G (un théorème fameux dû à Feit et Thomson montre que c'est toujours le cas) ne possède pas de caractère irréductible de degré 1 ou 2 hormis 1_G (s'inspirer de [F. M. 1] remarque p. 185).

Exercice 7 Probabilités et représentations, [C. G.] Tome 2 B.17 page 460.

Exercice 8 Le théorème de Molien, [F. M. 2] p. 180, utilisable aussi dans la leçon Polynômes à plusieurs indéterminées.

Exercice 9 Compter les solutions d'équations dans les groupes finis, [F. M. 2] p. 177 d'après [Se 3]. Soit G un groupe fini. On note C_i les classes de conjugaison de G. Le nombre de solutions de l'équation $g_1 g_2 ... g_k = 1$ avec $g_i \in C_i$ est $\frac{1}{|G|}|C_1|...|C_k| \sum_\chi \frac{\chi(x_1)....\chi(x_k)}{\chi(1)^{k-2}}$ où x_i est un système de représentants des classes de conjugaison C_i et χ parcourt les caractères irréductibles de G.

Application. Nombre de sous-groupes d'un groupe isomorphes à A_5, A_4, S_4, D_{2n}.