Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 52- Déterminant. Exemples et applications.

Commentaires du jury 2015 : Il s'agit encore d'une leçon où les résultats abondent et où le candidat devra faire des choix. On doit pouvoir, dans cette leçon, commencer par définir correctement le déterminant. Beaucoup de candidats entament la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ce qui est fort à propos. Toutefois, il est essentiel de savoir le montrer. Il faut que le plan soit cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est délicat de définir $det(A - XId)$ avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. Le calcul explicite est important, toutefois, le jury ne peut se contenter que d'un Vandermonde ou d'un déterminant circulant ! De même il est envisageable que des candidats s'intéressent aux calculs de déterminant sur $\mathbb{Z}$ avec des méthodes multimodulaires. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon.
Commentaires du jury 2016 : Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. Il est possible d'entamer la leçon en disant que le sous-espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, toutefois, il est essentiel de savoir le montrer. Le plan doit être cohérent ; si le déterminant n'est défini que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il est délicat de définir $det(A-XId)$ avec A une matrice carrée. L'interprétation du déterminant comme volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter que d'un déterminant de Vander- monde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des détermi- nants, avec des illustrations sur des exemples, doivent être présentées. Il serait bien que la continuité du déterminant trouve une application, ainsi que son caractère polynomial. Pour les utilisations des propriétés topologiques, on n'ommetra pas de préciser le corps de base sur lequel on se place. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminant sur $\mathbb{Z}$ avec des méthodes multimodulaires ; de plus, le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon.

Remarque : La présentation du plan doit insister sur les raisons des différentes parties :

Partie 1, l'anneau de base est un corps (commutatif), c'est le cadre de l'algèbre linéaire. On introduit le K-espace vectoriel des n-formes multilinéaires alternées et on montre qu'il est de dimension 1 ; cela a pour conséquence la définition du déterminant d'un endomorphisme dans une base B donnée. On obtient alors facilement la formule du produit $det_B(uv) = det_B u det_B v$.

Dans la partie suivante on passe aux déterminants des matrices carrés à coefficients dans un anneau commutatif ; on déduit de la partie 1 la formule du produit des déterminant dans le cas d'un anneau intègre (un tel anneau s'injecte dans son corps des fractions). En particulier étant données 2 matrices carrées $M = (X_{i,j})$ et $N = (Y_{k,l})$ à coefficients dans l'anneau intègre $\mathbb{Z}[X_{i,j}, Y_{k,l}]$ ($2n^2$ indéterminées) qui est un anneau intègre on a la formule $det(MN) = det M det N$. Si A est un anneau quelconque et M et N sont 2 matrices la formule s'en déduit par évaluation des variables $X_{i,j}$ et $Y_{k,l}$ dans les coeff de M et N, [Fr. A] p. 36.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2']Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. A] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)
[Fr. B-C-D] Fresnel J. *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999)
[Fr. MMG] Fresnel J. *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 1996, 2010)
et

[A. F. A] Arnaudies J.M., Fraysse H. *Cours de mathématiques, Algèbre* (Dunod 1987)
[A. F. B] Arnaudies J.M., Fraysse H. *Cours de mathématiques, Algèbre bilinéaire* (Dunod 1987)

Développements conseillés :

(1) Déterminant de Vandermonde, [Fr. A] p.87, application aux endomorphismes nilpotents, [Fr. A] p.161.

(2) Application multiplicative sur les matrices, [Fr. A] exercice 1.4.28 p 93

(3) Matrices de Hadamard, [F. M. 2] p. 115.

(4) Soit V un sous K-espace vectoriel de $M_n(K)$ tel que $V - \{0\} \subset GL_n(K)$. On discute de la dimension de V et de l'existence de V en fonction de K, [F. M. 2] p. 80 et compléments [F. M. 2'].

(5) Sous-espaces vectoriels de dimension r de k^n (Fresnel-Matignon $n°$ 2 p. 2 question 2)

(6) La formule $res(f, g)$ pour $f = \prod(X - \alpha_i),\ g = \prod(X - \beta_j) \in A[X]$ où A est un anneau commutatif, [F. M. 2] p. 235.

(7) Application géométrique : Calcul de coordonnées barycentriques, [F. M. 1] $n°120$ p. 348 et $n°121$ p. 350.

Exercice 1 Calcul du déterminant de Vandermonde par l'interpolation.
Soient A un anneau commutatif et $a_i \in A,\ 1 \leq i \leq n$. On note pour $1 \leq i \leq n$, C_i le vecteur colonne ${}^t(a_1^{i-1}, a_2^{i-1}, ..., a_n^{i-1})$ et $V(a_1, ..., a_n)$ le déterminant de la matrice $(C_1, C_2, ..., C_n)$.

(1) Utiliser les coefficients de $P := \prod_{1 \leq i \leq n-1}(X - a_i) \in A[X]$ pour construire une combinaison linéaire des colonnes C_i et en déduire une formule liant $V(a_1, ..., a_n)$ à $V(a_1, ..., a_{n-1})$. Conclure.

(2) Dans le cas où A est un corps déterminer le rang de la matrice de Vandermonde $(C_1, C_2, ..., C_n)$

Exercice 2 Une application arithmétique de Vandermonde [F. M. 1] $n°$ 89 p. 250
Soit k un corps commutatif.

(1) Pour $i \in \mathbb{N}$, $P_i(X) \in k[X]$ est de degré i et de coefficient de plus haut degré $p_i \in k - \{0\}$. Soit $(x_1, x_2, ..., x_n) \in k^n$ et $A \in M_n(k)$ dont le coefficient à la ligne i et à la colonne j est $P_{i-1}(x_j)$. Calculer $\det A$ (se ramener à un déterminant de Vandermonde par des opérations élémentaires).

(2) Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $P_0(X) = 1$ et pour $i > 0$, $P_i(X) := \frac{X(X-1)...(X-i+1)}{i!} \in \mathbb{Q}[X]$.
   (a) Montrer que $P_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
   (b) Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$, déduire de 1. que $1!2!...(n-1)!$ divise $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_i - a_j)$

Exercice 3 Calcul du déterminant de Cauchy par l'interpolation.
Soient K un anneau commutatif et $a_i, b_i \in K,\ 1 \leq i \leq n$ avec $\prod_{i,j}(a_i + b_j) \neq 0$. On note
$C(a_1, .., a_n, b_1, .., b_n) := (\frac{1}{a_i + b_j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$. On veut calculer son déterminant.

(1) On considère $F(X) := \frac{\prod_{1 \leq i \leq n-1}(X - a_i)}{\prod_{1 \leq j \leq n}(X + b_j)}$ et on suppose que $b_i \neq b_j$ si $i \neq j$. Montrer qu'il existe $\lambda_i \in K,\ 1 \leq i \leq n$ avec $F(X) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\lambda_j}{X + b_j}$.

(2) Utiliser les λ_i pour construire une combinaison linéaire des colonnes de $C(a_1, .., a_n, b_1, .., b_n)$ et en déduire une formule liant $\det C(a_1, .., a_n, b_1, .., b_n)$ et $\det C(a_1, .., a_{n-1}, b_1, .., b_{n-1})$. Conclure.

Exercice 4 Voir [A. F. A] p. 551.
Soit $M = (m_{i,j}) \in M_n(K)$, on suppose que pour $i > j$ on a $m_{i,j} = a$ et que pour $i < j$ on a $m_{i,j} = b$ avec $a \neq b$. On se propose de calculer $det\ M$. Pour cela on considère la matrice $C = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = 1$ et on pose $P(X) := det\ (XC + M)$.

(1) Montrer que $P(X) \in K + KX$.

(2) Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$ et en déduire $P(X)$.

(3) Examiner le cas où $a = b$.

Exercice 5 Sur le rang de la comatrice, [Fr. A] exercice 1.4.30 p 94.

Exercice 6 Le déterminant de Catalan ou de Smith, [F. M. 1] $n°86$ question 3 p. 245.

Soit A un anneau commutatif et $\Psi : \mathbb{N}^\star \to A$ une application. Pour $(i,j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, on définit $m_{i,j} := \sum_{k|i,k|j} \Psi(k)$ et $M := (m_{i,j})_{i,j} \in M_n(A)$.

(1) Soit $L := (\ell_{i,j})_{i,j} \in M_n(A)$ et $D \in M_n(A)$ la matrice diagonale avec $d_{i,i} = \Psi(i)$. Exprimer $({}^tLDL)_{i,j}$.

Preuve. On a $({}^tLDL)_{i,j} = \sum_{1\leq k\leq n} \ell_{k,i}d_{k,k}\ell_{k,j}$. ///

(2) Déduire un choix naturel de L triangulaire supérieure strict (i.e. des 1 sur la diagonale) telle que ${}^tLDL = M$.

Preuve. Si L est triangulaire supérieure strict alors $({}^tLDL)_{i,j} = \sum_{1\leq k\leq \min(i,j)} \ell_{k,i}d_{k,k}\ell_{k,j}$ *; ainsi* $\ell_{k,i} = 1$ *si* $k|i$ *et* 0 *autrement et* $d_{k,k} = \Psi(k)$ *conviennent.* ///

(3) En déduire $\det M$.

Preuve. $\det M = \det{}^t LDL = \det D = \prod_{1\leq k\leq n} \Psi(k)$. ///

(a) On suppose que $m_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à i et j. Calculer $\det M$.

Preuve. Dans ce cas $\Psi(k) = 1$ *pour* $k \in \mathbb{N}^\star$ *convient. Ainsi* $\det M = 1$. ///

(b) On suppose que $m_{i,j}$ est la somme des diviseurs communs à i et j. Calculer $\det M$.

Preuve. Dans ce cas $\Psi(k) = k$ *pour* $k \in \mathbb{N}^\star$ *convient. Ainsi* $\det M = n!$. ///

(c) On suppose que $m_{i,j}$ est (i,j), le pgcd de i et j. Calculer $\det M$.

Preuve. Dans ce cas $\Psi(k) = \varphi(k)$ *pour* $k \in \mathbb{N}^\star$ *où* φ *désigne la fonction indicatrice d'Euler convient. En effet* $\sum_{k|i,k|j} \varphi(k) = \sum_{k|PGCD(i,j)} \varphi(k) = PGCD(i,j)$. *Ainsi* $\det M = \prod_{1\leq k\leq n} \varphi(k)$. ///

Exercice 7 Soit K un corps commutatif et $f : M_n(K) \to K$, une application non constante avec $f(AB) = f(A)f(B)$ pour tout $A, B \in M_n(K)$. On suppose $n > 1$.

(1) Montrer que $f(I_n) = 0$ ou 1, conclure que $f(I_n) = 1$ et que $f(M) \neq 0$ pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Preuve. On a $f(I_nI_n) = f(I_n)f(I_n)$*, ainsi* $f(I_n) = 0$ *ou* 1*. Si* $f(I_n) = 0$*, il suit que* $f(A) = f(AI_n) = 0$ *et donc* f *est une application constante (contradiction). Si* $M \in \mathrm{GL}_n(K)$*, alors* $1 = f(I_n) = f(M)f(M^{-1})$ *ainsi* $f(M) \neq 0$. ///

(2) Montrer que $f(0) = 0$ ou 1. En supposant que $f(0) = 1$ montrer que $f(M) = 1$ pour tout $M \in M_n(K)$. En déduire que $f(0) = 0$.

Preuve. On a $f(0) = f(0)f(0)$*, ainsi* $f(0) = 0$ *ou* 1*. On suppose que* $f(0) = 1$*, alors* $1 = f(0) = f(0M) = f(0)f(M) = f(M)$ *et* f *est une application constante (contradiction).* ///

(3) Soit $M \in M_n(K)$ avec rang de M égal $r < n$. Montrer que M est équivalente modulo $\mathrm{GL}_n(K)$ à une matrice nilpotente. Conclure que $f(M) = 0$.

Preuve. Les matrices équivalentes sont caractérisées par leur rang. Puisque $r < n$ *on peut considérer la matrice* $J_r := \sum_{1\leq i\leq r} E_{i,i+1}$*, son image est de dimension* r *et un calcul immédiat donne* $J_r^n = 0$ *(on peut aussi utiliser Cayley-Hamilton ...). Ainsi* $M = PJ_rQ$ *avec* $P, Q \in GL_n(K)$ *et donc* $f(M) = f(P)f(J_r)f(Q) = f(J_r)$*. Mais* $f(J_r)^n = f(J_r^n) = 0$ *et donc* $f(M) = 0$. ///

(4) On veut montrer que $f(\mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}$.

(a) Pour $\lambda \in K - \{0\}$ et $i \neq j$, on note $B_{i,j}(\lambda) := Id + \lambda E_{i,j}$. Pour σ une permutation de $\{1, ..., n\}$ on note $Q(\sigma) \in M_n(K)$ telle que $Q(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ où $(e_i)_i$ est la base canonique de K^n. Enfin si $\mu \in K - \{0\}$, on note $D(\mu)$ la matrice avec $D(\mu)(e_2) = \mu e_2$ et $D(\mu)(e_i) = e_i$ pour $i \neq 2$. Montrer que $Q(\sigma)E_{i,j}Q(\sigma)^{-1} = E_{\sigma(i),\sigma(j)}$ et que $D(\mu)E_{2,1}D(\mu)^{-1} = \mu E_{2,1}$. En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ avec $B_{i,j}(\lambda) = PB_{2,1}(1)P^{-1}$.

Preuve. On évalue $Q(\sigma)E_{i,j}Q(\sigma)^{-1}(e_{\sigma(k)}) = Q(\sigma)E_{i,j}(e_k) = \delta_{k,j}e_{\sigma(i)}$ et donc $Q(\sigma)E_{i,j}Q(\sigma)^{-1} = E_{\sigma(i),\sigma(j)}$. L'égalité $D(\mu)E_{2,1}D(\mu)^{-1} = \mu E_{2,1}$ est immédiate. Soit σ une permutation de $\{1,...,n\}$ avec $\sigma(1) = i$ et $\sigma(2) = j$ (on complète par une bijection entre les complémentaires), alors $Q(\sigma)E_{i,j}Q(\sigma)^{-1} = E_{1,2}$ et pour $\mu := 1/\lambda$, on a $D(\mu)Q(\sigma)(\lambda E_{i,j})Q(\sigma)^{-1}D(\mu)^{-1} = E_{1,2}$, ainsi $P = D(\mu)Q(\sigma)$ convient. On vient ainsi de vérifier que la réduction de Jordan de $B_{i,j}(\lambda)$ est $B_{2,1}(1)$. Il suit que $f(B_{i,j}(\lambda) = f(B_{2,1}(1))$. ///

(b) On suppose que $K \neq \mathbb{F}_2$. Montrer qu'il existe $a \in K - \{0,1\}$ avec $B_{2,1}(1) = B_{2,1}(a)B_{2,1}(1-a)$. En déduire que $f(B_{2,1}(1)) = 1$ puis que $f(\mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}$.

Preuve. Soit $a \in K - \{0,1\}$, alors $B_{2,1}(a)B_{2,1}(1-a) = B_{2,1}(a+1-a) = B_{2,1}(1)$. Ainsi avec la question précédente on déduit que $f(B_{2,1}(1)) = f(B_{2,1}(1))^2$ et donc $f(B_{2,1}(1)) = 1$ ($B_{2,1}(1)$ est inversible). Puisque $\mathrm{SL}_n(K)$ est engendré par les matrices élémentaires de transvection il suit que $f(\mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}$. ///

(c) On suppose que $K = \mathbb{F}_2$. Montrer que $f(B_{i,j}(\lambda)) = Id$ pour $\lambda \in K$. En déduire que $f(\mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}$.

Preuve. Si $K = \mathbb{F}_2$, $f(B_{i,j}(\lambda)^2) = f(B_{i,j}(2\lambda)) = f(I_n) = 1$ (on utilise que la caractéristique est 2) et on conclut comme précédemment. ///

(5) Montrer qu'il existe $\rho : K^\times \to K^\times$, un homomorphisme avec $f(A) = \rho(\det(A))$ pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Preuve. f induit un homomorphisme de groupes $GL_n(K) \to K^\times$, et $f(\ker\det) = f(\mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}$, ainsi le théorème de factorisation fournit un unique homomorphisme de groupes avec $f = \rho \circ \det$. ///

Exercice 8 Applications du déterminant à la topologie. Sur la connexité des matrices de rang r, [Fr. A.] p. 130.

On munit $M_n(\mathbb{C})$ de sa topologie de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

(1) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Preuve. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'image réciproque par l'application déterminant $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ de l'ouvert $\mathbb{C} - \{0\}$ de $\mathbb{C}$. Puisque $\det$ est une fonction polynôme sur $M_n(\mathbb{C})$ donc continue, il suit que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{C})$. Enfin si $M \in M_n(\mathbb{C})$ le polynôme caractéristique $\chi_M(X) := \det(XI_n - M)$ est un polynôme unitaire de degré n, ainsi pour $k \in \mathbb{N}$ suffisament grand $\chi_M(1/k) \neq 0$ ainsi M est limite de la suite $M - \frac{1}{k}I_n \in \mathrm{GL}_n(K)$. ///

(2) Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Preuve. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on va construire un chemin (continu) dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de I_n à A ce qui montrera que la composante connexe de l'identité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour cela on écrit $A = \prod_{k\in I} T_k D(\det A)$ avec $T_k = B_{i_k,j_k}(\lambda_k)$. L'application $t \in [0,1] \to \prod_{k\in I} B_{i_k,j_k}(t\lambda_k)$ fournit un chemin continu dans $\mathrm{GL}_n(K)$ de $D(\det A)$ à A. Ensuite on écrit $\det A = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^{>0}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, alors l'application $t \in [0,1] \to D((1-t+t\rho)e^{it\theta})$ fournit un chemin continu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de I_n à $D(\det A)$. ///

(3) Soit $r < n$ et N_r le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{C})$ des matrices de rang $\leq r$.

(a) Montrer que N_r est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$.

Preuve. Une matrice $A \in N_r$ si et seulement si ses mineurs de taille $> r$ sont nuls, c'est une condition fermée sur $M_n(\mathbb{C})$ puisque $\det$ est une fonction polynôme. ///

(b) Montrer que $N_r - N_{r-1}$ est un ouvert connexe de N_r.

Preuve. D'abord $N_r - N_{r-1}$ *est un ouvert par la question précédente. Soit* $J_r := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N_r - N_{r-1}$ *alors* $N_r - N_{r-1}$ *est l'image continue du connexe* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *par l'application* $(P, Q) \to PJ_rQ$. */* / /*

Exercice 9 Déterminant et rang.

Soit K un corps commutatif et $M = (m_{i,j}) \in M_{p,n}(K)$. On rappelle que le rang de $M = (C_1, C_2, ..., C_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes C_k, $1 \leq k \leq n$ de M. Soit $I_s := (i_1, i_2, ..., i_s)$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_s \leq p$ et $J_s := (j_1, j_2, ..., j_s)$ avec $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_s \leq n$ $M_{I_s,J_s} \in M_s(K)$ la matrice extraite de M en oubliant les lignes d'indices $\notin I_s$ et les colonnes d'indices $\notin J_s$.

(1) On suppose que le rang de M est égal à r. Montrer que pour $s > r$, $\det M_{I_s,J_s} = 0$ (on pourra considérer une projection linéaire convenable)

Preuve. Pour $s > r$ *les colonnes* $(C_j)_{j \in J_s}$ *sont liées il en est donc de même si l'on supprime les lignes de ces colonnes d'indice* $\notin I_s$ *ainsi la matrice* M_{I_s,J_s} *n'est pas inversible. / / /*

(2) En déduire que le rang de M est égal au maximum des entiers s tels qu'il existe une matrice M_{I_s,J_s} extraite de M qui est inversible.

Preuve. Il faut de montrer qu'il existe un déterminant $\det M_{I_r,J_r}$ *qui n'est pas nul. On extrait de la famille* $C_1, C_2, ..., C_n$*, une famille libre maximale* $(C_k)_{k \in I_s}$ *et puisque c'est une base de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes* C_k*,* $1 \leq k \leq n$ *de* M *on a* $s = r$*. On est ainsi ramené à une matrices* $M \in M_{p,r}(K)$ *dont les colonnes sont linéairement indépendantes ; il faut en extraire une sous-matrice de taille* $r \times r$ *de déterminant non nul. Pour cela on fait une récurrence sur* r*. Si* $r = 1$*, la matrice n'est pas nul et c'est donc fini. Supposons donc que* $M = (C_1, C_2, ..., C_{r+1}) = {}^t(L_1, L_2, ..., L_p) \in M_{p,r+1}(K)$ *est de rang* $r + 1$*. Quitte à faire une permutation des lignes (donc un changement de base à l'arrivée) on peut supposer pour simplifier l'écriture que la matrice principale construite sur les* r*-premières lignes et les* r *premières colonnes* $M_r := (C_1(r), C_2(r), ..., C_r(r)) \in M_{r,r}(K)$ *est inversible. On suppose maintenant que les matrices* $M_r(i) := {}^t(L_1, ..., L_r, L_i) =: (C_1(r,i), C_2(r,i), ..., C_r(r,i), C_{r+1}(r,i)) \in M_{r+1,r+1}(K)$ *pour* $i > r$ *sont de déterminant nul, on doit alors aboutir à une contradiction. Puisque les* r*-premières colonnes de* $M_r(i)$ *sont indépendantes, la dernière colonne (*)* $C_{r+1}(r,i) = \sum_{1 \leq k \leq r} \lambda_k C_k(r,i)$ *et les* λ_k *sont ainsi uniquement déterminés (ce sont les solutions d'un système de Cramer). Si on projette cette relation (*) sur les* r*-premières lignes on obtient (**)* $C_{r+1}(r) = \sum_{1 \leq k \leq r} \lambda_k C_k(r)$ *où* $C_{r+1}(r) := {}^t(m_{1,r+1}, ..., m_{r,r+1})$*, la* $r+1$*-ième colonne de* M *tronquée des lignes de rang* $> r$*. Puisque les* r *colonnes* $C_k(r)$ *sont linéairement indépendantes (hypothèse de récurrence) cela montre que les* λ_k *sont indépendants de* i *et donc que* $C_{r+1} = \sum_{1 \leq k \leq r} \lambda_k C_k$ *d'où une contradiction. / / /*

(3) Montrer que si $N \in M_m(K)$ alors $\det N = \det {}^tN$ où ${}^tN$ désigne la matrice transposée de N.

Preuve. . On a $\det N = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) n_{\sigma(1),1} n_{\sigma(2),2} ... n_{\sigma(n),n}$ *et* $\det {}^tN = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) n_{1,\sigma(1)} n_{2,\sigma(2)} ... n_{n,\sigma(n)}$*. Il suffit de remarquer que pour* $\sigma \in \mathcal{S}_n$*,* $n_{i,\sigma(i)} = n_{\sigma^{-1}(j),j}$ *où* $j = \sigma(i)$*. Ainsi* $n_{1,\sigma(1)} n_{2,\sigma(2)} ... n_{n,\sigma(n)} = n_{\sigma^{-1}(1),1} n_{\sigma^{-1}(2),2} ... n_{\sigma^{-1}(n),n}$*. Le résultat suit alors du fait que* $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$*.*

On peut donner une autre preuve. Si $\det N \neq 0$*, on a vu qu'avec la décomposition* $N = D_n(\det N) \prod_{i \in I} B_i$ *où* I *est fini et chaque* B_i *est une matrice élémentaire de transvection . Puisque* B_i *est triangulaire avec* Id *sur la diagonale il suit que* $\det B_i = \det {}^tB_i = 1$ *; ainsi* $\det {}^tN = \det D_n(\det N) = \det N$ *puisque la matrice de dilatation est diagonale. De même si* $\det {}^tN \neq 0$ *alors comme précédemment on déduit que* $\det N \neq 0$*. / / /*

(4) En déduire que le rang de $M \in M_{p,n}(K)$ est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes de M.

Preuve. Puisque le rang de M est le maximum des entiers s tels qu'il existe une matrice M_{I_s,J_s} extraite de M avec $\det M_{I_s,J_s} \neq 0$ et puisque $\det {}^tM_{I_s,J_s} = \det M_{I_s,J_s}$ le rang de M est égal au rang de ${}^tM$. On retrouve ainsi un résultat montré avec la dualité et la transposée d'un endomorphisme. ///

(5) Soient $K \subset L$, deux corps commutatifs et $M = (C_1, C_2, ..., C_n) \in M_n(K)$. Montrer que $\dim_K \sum_{1 \leq i \leq n} KC_i = \dim_L \sum_{1 \leq i \leq n} LC_i$.

Preuve. La dimension $\dim_K \sum_{1 \leq i \leq n} KC_i$ est le rang de la matrice $M \in M_n(K)$ et $\dim_L \sum_{1 \leq i \leq n} LC_i$ le rang de $M \in M_n(L)$. Nous avons vu que le rang de $M \in M_n(K)$ est aussi le maximum des entiers s tels qu'il existe une matrice M_{I_s,J_s} extraite de M avec $\det M_{I_s,J_s} \neq 0$ c'est donc aussi le rang de $M \in M_n(L)$. ///

(6) Soient $K \subset L$, deux corps commutatifs et $A, B \in M_n(K)$. On note $S(K) := \{M \in M_n(K) \mid AM = MB\}$ et $S(L) := \{M \in M_n(L) \mid AM = MB\}$. Montrer que $\dim_K S(K) = \dim_L S(L)$ (on pourra considérer la matrice dans la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $M_n(K)$ de l'application linéaire $\varphi_K : M_n(K) \to M_n(K)$ définie par $\varphi_K(M) = AM - MB$).

Preuve. Soit $\Phi_K \in M_{n^2}(K)$ la matrice de l'endomorphisme φ_K dans la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Par le théorème du rang $\dim_K S(K) = n^2 - (\Phi_K)$. Puisque Φ_K est égal à la matrice $\Phi_L \in M_{n^2}(L)$ de l'endomorphisme φ_L dans la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et puisque $(\Phi_K) = (\Phi_L)$ (par la question précédente) le résultat suit. ///

(7) On reprend les notations précédentes. Soit $C \in M_n(K)$. On note $S_C(K) := \{M \in M_n(K) \mid AM - MB = C\}$ et $S_C(L) := \{M \in M_n(L) \mid AM - MB = C\}$. Déduire de la question précédente que si $S_C(L) \neq \emptyset$ il en est de même de $S_C(K)$.

Preuve. L'ensemble $S_C(K) \neq \emptyset$ si et seulement si $C \in \operatorname{Im} \varphi_K$. Soit $\Phi_K(C) \in M_{n^2,n^2+1}(K)$ la matrice obtenue par concaténation de Φ_K et de la colonne des coordonnées de C dans la base $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $C \in \operatorname{Im} \varphi_K$ si et seulement si $\Phi_K = \Phi_K(C)$. Puisque la nonvacuité de $S_C(L)$ se traduit par $\Phi_L = \Phi_L(C)$ et que $\Phi_L = \Phi_K$, $\Phi_L(C) = \Phi_K(C)$ le résultat suit. ///

(8) On reprend les notations précédentes avec $K = \mathbb{R}$ et $L = \mathbb{C}$ et on suppose qu'il existe $P \in S(\mathbb{C})$ qui est inversible. Montrer qu'il existe $Q \in S(\mathbb{R})$ qui est inversible.

Preuve. Puisque $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ on écrit $P = P_1 + iP_2$ où $P_j \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $P_j \in S(\mathbb{R})$. On sait seulement que $\det(P_1 + iP_2) \neq 0$ ce qui ne garantit pas que $\det P_j \neq 0$. Considérons le polynôme $D(X) := \det(P_1 + XP_2) \in \mathbb{R}[X]$. Puisque $D(i) \neq 0$, il suit que $D(X)$ n'est pas identiquement nul. Si $\deg D = 0$, P_1 convient et sinon puisque $\mathbb{R}$ est infini il existe $x \in \mathbb{R}$ qui évite les zéros de $D(X)$ et alors $Q := P_1 + xP_2$ convient. ///

(9) On reprend les notations précédentes avec $K \subset L$ deux corps commutatifs infinis et on suppose qu'il existe $P \in S(L)$ qui est inversible. Montrer qu'il existe $Q \in S(L)$ qui est inversible.

Preuve. On remarque que $\dim_K S(K) \leq n^2$, que $S(K) \subset S(L)$ et que $\dim_K S(K) = \dim_L S(L)$. Il suit que si $P_1, ..., P_s$ est une base du K-espace vectoriel $S(K)$ c'est aussi une base du L-espace vectoriel $S(L)$. Soit $D(X_1, .., X_s) := \det(X_1P_1 + ... + X_sP_s)$. Par hypothèse il existe $(x_1, ..., x_s) \in L^s$ avec $D(x_1, ..., x_s) \neq 0$, ainsi $D(X_1, .., X_s) \neq 0$ et puisque K est infini il existe $(y_1, ..., y_s) \in L^s$ avec $D(y_1, ..., y_s) \neq 0$. ///

Remarque. *Le résultat est encore vrai si K est fini. En effet il existe $P \in S(K)$ qui est inversible ssi A et B sont semblables ce qui est le cas ssi A, B ont les mêmes invariants de similitude (réduction de Frobenius).*

Exercice 10 Matrices de Hadamard, [F. M. 2] p. 115.

Exercice 11 Frobenius-Zolotarev, [F. M. 1] $n°72$ par. 1.1. p. 174.

Soit p est un nombre premier impair, $q = p^s$ et V est un $\mathbb{F}_q$ espace vectoriel alors si $u \in GL(V)$, u définit une permutation de l'ensemble fini V et on note $sign(u)$ sa signature. Alors on a $sign(u) = 1$ si $\det u$ est un carré dans $\mathbb{F}_q^\star$ et -1 sinon (si $q = p$ c'est le symbole de Legendre sur $\mathbb{F}_p$ de $\det u$).

Preuve. Pour simplifier supposons que $q = p$, alors V est un $\mathbb{F}_p$ espace vectoriel de dimension n et $e_1, ..., e_n$ une base B. Le groupe $GL(V)$ s'identifie au groupe $GL_n(\mathbb{F}_p)$ en considérant la matrice des endomorphismes de V dans la base B.

Le pivot de Gauss montre que $P \in GL_n(\mathbb{F}_p)$ s'écrit comme produit de la matrice de dilatation $D(\det P)$ (diagonale $1, 1, ..., 1, \det P$) et de matrices $B_{i,j}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_p^\star$.

On remarque que $B_{i,j}(\lambda)^p = Id$; ainsi si $sign(B_{i,j}(\lambda))$ désigne la signature de la permutation de V induite par $B_{i,j}(\lambda)$; on a $(sign(B_{i,j}(\lambda)))^p = 1$ et puisque p est impair il suit que $sign(B_{i,j}(\lambda)) = 1$. Il suit donc que la signature de la permutation de V induite par P est $sign(P) = sign(D(\det P))$. Si $\det P$ est un carré alors $D(\det P)$ est un carré dans $GL_n(\mathbb{F}_p)$ et donc $sign(P) = 1$.

Supposons donc que $\det P$ n'est pas carré et soit θ un générateur du groupe $\mathbb{F}_p^\star$ (il est cyclique). On écrit $\det P = \theta^{2m+1}$; ainsi $sign(D(\det P)) = sign(D(\theta))$.

Pour cela on écrit la décomposition en produits de cycles à supports disjoints de la signature de la permutation de V induite par $D(\theta)$.

Soit $H = < e_1, ..., e_{n-1} >$ alors l'orbite de $h \in H$ est réduite à h.

Si maintenant $x = h + \theta^i e_n$ avec $h \in H$, alors l'orbite de x est $\{h + \theta e_n, h + \theta^2 e_n, ..., h + \theta^i e_n, ..., h + \theta^{(p-1)} e_n\}$. C'est donc une orbite de longueur $p - 1$. Ainsi $D(\theta)$ induit un produit de $\frac{p^n - p^{n-1}}{p-1} = p^{n-1}$ cycles de longueurs $p - 1$ à supports disjoints. La signature est donc $(-1)^{(p-2)p^{n-1}} = (-1)$. ///

Exercice 12

Le groupe $\mathrm{SL}_n(A)$ et matrices de transvection élémentaires, [Fr. A] p. 66.

Soit A un anneau commutatif. On note $SL_n(A) \subset M_n(A)$ le groupe des matrices de déterminant 1.

(1) Soit $a_1, a_2 \in A$ avec $a_1 a_2 = 1$ et S_2 la matrice $S_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que $S_2 \in SL_2(A)$.

(b) Construire une décomposition de S_2 sous la forme d'un produit de matrices élémentaires de transvections dans $SL_2(A)$.

Preuve. Il faut faire apparaître un pivot non nul en position $(2, 1)$. La multiplication à gauche par $B_{2,1}(1)$ donne $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ puis la multiplication à gauche par $B_{1,2}(a_2 - 1)$ donne $\begin{pmatrix} 1 & (a_2-1)a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$, la multiplication à gauche par $B_{2,1}(-a_1)$ donne $\begin{pmatrix} 1 & (a_2-1)a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, enfin la multiplication à gauche par $B_{1,2}(-(a_2 - 1)a_2)$ donne l'identité. Ainsi $S_2 = B_{2,1}(-1)B_{1,2}(1 - a_2)B_{2,1}(a_1)B_{1,2}((a_2 - 1)a_2)$. ///

(2) Soient $a_1, a_2, a_3 \in A$ avec $a_1 a_2 a_3 = 1$ et S_3 la matrice $S_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que $S_3 \in SL_2(A)$.

(b) En remarquant que $S_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$ Construire une décomposition de S_3 sous la forme d'un produit de matrices élémentaires de transvections dans $SL_3(A)$.

Preuve. Chacune des 2 matrices précédentes s'écrit comme dans la question 1 comme un produit de matrices élémentaires de transvections en travaillant sur le bloc diagonal 2×2 de déterminant 1. Ce résultat se généralise facilement en dimension quelconque, [Fr. A] p. 66. ///

Exercice 13

La décomposition "LDU", [F. M. 2] p. 28.

Soient $L_s \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le groupe triangulaire inférieur strict (Id sur la diagonale) et $U_s \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le groupe triangulaire supérieur strict (Id sur la diagonale), $\mathcal{D} \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le sous-groupe des matrices diagonales inversibles et $P \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le sous-groupe des matrices de permutations $Q(\sigma)$ avec $\sigma \in \mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, 2, ..., n\}$. Enfin si $M \in M_n(K)$ et $1 \leq k \leq n$, on note M_k, la matrice principale construite sur les k-premières lignes et colonnes de M et $\Delta_k(M)$ son déterminant.

(1) Montrer qu'il existe σ une permutation de $\{1, 2, ..., n\}$, $L \in L_s$, $U \in U_s$ et $D \in \mathcal{D}$ avec $A = Q(\sigma)LDU$.

(2) Soit $M = LU$ avec $L \in M_n(K)$ triangulaire inférieure et , $U \in M_n(K)$ quelconque. Montrer que $M_k = L_k U_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

Preuve. Le plus lumineux est de faire un produit par blocs. On écrit $L = \begin{pmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{pmatrix}$ *avec* $L_{1,1} \in M_{k,k}$, $L_{1,2} \in M_{k,n-k}$, $L_{2,1} \in M_{n-k,k}$ *et* $L_{2,2} \in M_{n-k,n-k}$ *et de même pour* U. *Alors* $LU = \begin{pmatrix} L_{1,1}U_{1,1} + L_{1,2}U_{2,1} & L_{1,1}U_{1,2} + L_{1,2}U_{2,2} \\ L_{2,1}U_{1,1} + L_{2,2}U_{2,1} & L_{2,1}U_{1,2} + L_{2,2}U_{2,2} \end{pmatrix}$. *Puisque* L *est triangulaire inférieure on a* $L_{1,2} = 0$ *et* $L_{1,1} = L_k$, $U_{1,1} = U_k$, *d'où le résultat. ///*

(3) En déduire que si $M = LDU$ avec $L \in L_s$, $D \in \mathcal{D}$ et $U \in U_s$ alors $M_k = L_k D_k U_k$ et que $\Delta_k(M) = \Delta_k(D)$.

Preuve. Puisque Puisque L *est triangulaire inférieure il suit de la question 1) que* $M_k = L_k(DU)_k$ *et puisque* D *est diagonale donc triangulaire inférieure* $(DU)_k = D_k U_k$. *Le reste est immédiat. ///*

(4) Soit $M \in M_n(K)$ avec $\prod_{1 \leq i \leq n} \Delta_i(M) \neq 0$. En appliquant le pivot de Gauss aux lignes de la matrice M, montrer qu'il existe $L \in L_s$, $U \in U_s$ et $D \in \mathcal{D}$ avec $M = LDU$.

Preuve. Puisque $m_{1,1} = \Delta_1(M)$ *la multiplication à gauche par les matrices* $B_{i,1}(-\frac{m_{i,1}}{m_{1,1}})$ *pour* $1 < i \leq n$ *donne la matrice* M' *avec* M'_2 *triangulaire supérieure de diagonale* $m'_{1,1} = m_{1,1}$, $m'_{2,2}$. *Par la question 1 (il faut remarquer que* $B_{i,1}(-\frac{m_{i,1}}{m_{1,1}}) \in L_s$*) on déduit que* $\Delta_2(M) = \Delta_2(M') = m_{1,1}m'_{2,2}$, *ainsi* $m'_{2,2} \neq 0$ *et on reitère le procédé jusqu'à l'obtention d'une matrice triangulaire supérieure. ///*

(5) On conserve les hypothèses de la question précédente. Montrer que le triplet (L, D, U) est unique. *Preuve. Si* $LDU = L'D'U'$ *on déduit que* $L^{-1}L' = (DU)(D'U')^{-1}$ *est dans* L_s *et triangulaire supérieure, c'est donc la matrice* Id. *Il suit que* $L = L'$ *et* $DU = D'U'$. *Ainsi* $D^{-1}D' = UU'^{-1}$ *est diagonale et dans* U_s, *c'est donc la matrice* Id. *///*

(6) Dans cette question K est le corps fini à q éléments. On veut calculer le nombre de matrices de $M_n(\mathbb{F}_q)$ qui admettent une décomposition "LDU".

(a) Soit $M_n \in M_n(\mathbb{F}_q)$ qui admet une décomposition "LDU". Soit $M \in M_{n+1}(\mathbb{F}_q)$ une matrice dont la matrice principale construite sur les n premières colonnes coïncide avec M_n. Montrer qu'une CNS pour que M admette une décomposition "LDU" est que le coefficient $m_{n+1,n+1}$ évite une valeur fonction des autres coefficients.

Preuve. Il s'agit de résoudre l'équation $\Delta_{n+1}(M_{n+1}) = 0$. *Puisque les colonnes de la matrices* M_n *sont linéairement indépendantes il existe des coefficients uniquement définis* λ_i *pour* $i \leq n$ *tels que* $m_{i,n+1} = \sum_{k \leq n} \lambda_k m_{i,k}$ *(les* λ_i *sont les solutions d'un système de Cramer) ainsi* $\det M_{n+1} = (m_{n+1,n+1} - \sum_{k \leq n} \lambda_k m_{n+1,k}) \det M_n$. *Ainsi* M_{n+1} *admet une décomposition "LDU" si et seulement si* $m_{n+1,n+1} \neq \sum_{k \leq n} \lambda_k m_{n+1,k}$. *///*

(b) En déduire que le nombre de matrices de $M_n(\mathbb{F}_q)$ qui admettent une décomposition "LDU" est $(q-1)^n q^{n(n-1)}$.

Preuve. Si N_n *est le nombre de matrices de* $M_n(\mathbb{F}_q)$ *qui admettent une décomposition "LDU" alors* $N_{n+1} = (q-1)q^{2n}N_n$. *On conclut avec* $N_1 = q - 1$. *///*

(c) Retrouver ce résultat en utilisant l'unicité de la décomposition "LDU"

Preuve. Il suffit de compter les choix respectivement pour L, D *et* U. *///*

Exercice 14
La décomposition "LDU" générique, [F. M. 2] p. 41.

Exercice 15 Déterminant et volumes classiques en géométrie euclidienne, [F. M. 1] exercice 143 , p. 423.

Exercice 16
Matrice de Gram, [F. M. 1] $n°134$ p. 386, [A. F. B] p. 62 et 86 et inégalité de Hadamard, [Fr. B-C-D] p. 134.

Soit $(E,(.|.))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. Pour $(x_1,...,x_p)$ une famille de E, on définit $G(x_1,...,x_p) := \det((x_i|x_j))_{i\le p, j\le p}$ (déterminant de Gram).

(1) Soit $(e_1,...,e_p)$ (resp. $(f_1,....,f_p)$) une famille de E, $M = (m_{i,j})_{i,j} \in M_p(\mathbb{R})$ tel que $e_j = m_{1,j}f_1 + ... + m_{p,j}f_p$ pour $1 \le j \le p$. Montrer que $((e_i|e_j))_{i,j} = {}^tM((f_i|f_j))_{i,j}M$.

(2) Soit $(e_1,...,e_p)$ une famille de E que l'on suppose libre. En considérant une BON du sous-espace vectoriel $V = \sum_{i\le p}\mathbb{R}e_i$ de $(E,(.|.))$ déduire de la question précédente que $G(e_1,...,e_p) > 0$

(3) Soit $(e_1,...,e_p)$ une famille de E que l'on suppose liée. Montrer que $G(e_1,...,e_p) = 0$.

(4) (a) L'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Montrer par récurrence sur r que si $(e_1,...,e_r)$ une famille libre de E alors il existe une unique famille orthonormale $(g_1,...,g_r)$ de E telle que $g_1 = a_{1,1}e_1,\ g_2 = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2,\ g_r = a_{1,r}e_1 + a_{2,r}e_1 + ... + a_{r,r}e_r$ avec $a_{i,i} > 0$ pour $1 \le i \le r$.

(b) En déduire que pour toute famille $(e_1,...,e_p)$ on a $\det((e_i|e_j))_{i,j} \le \prod_{1\le i\le p}(e_i|e_i)$ (inégalité de Hadamard).

(c) Montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si la famille $(e_1,...,e_p)$ est orthogonale.

(5) Soit $(e_1,...,e_p)$ une famille libre de E et $V := \sum_{i\le p}\mathbb{R}e_i$ et $x \in E$. Montrer que $d(x,V)^2 = \frac{G(e_1,...,e_p,x)}{G(e_1,...,e_p)}$ où $d(x,V)$ désigne la distance de x à V (on pourra calculer $G(e_1,...,e_p,x)$ en utilisant l'égalité $(x|x) = (y|y) + d(x,V)^2$ où y est la projection orthogonale de x sur V), [Fr. B-C-D] p.154.