Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 61- Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimensions 2 et 3.

Commentaires du jury 2015 : La classication des isométries en dimension 2 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut penser aux applications aux isométries laissant stables certaines objets en dimension 2 et 3.
Commentaires du jury 2016 : La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines, et savoir composer des isométries affines. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux applications aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3.

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2']Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. MMG96] Fresnel J. *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 1996)
[Fr. MMG10] Fresnel J. *Méthodes modernes en géométrie* (Hermann 2010)

Développements conseillés :

(1) Réduction canonique des isométries,[Fr. MMG10] p. 145, [Fr. MMG96] p. 150. Application, [Fr. MMG10] exercice 1. 6.11 p. 167 et exercice 3 ci-dessous.
(2) Tuilage du plan, [F. M. 1] $n°123$ p. 361.
(3) Groupe des isométries du tétraèdre régulier et du cube, [F. M. 1] $n°133$.

Exercice 1 Une application d'un espace euclidien qui conserve les distances est affine car produit de réflexions, [Fr. MMG10] prop. 1.4.5 p. 157 et [Fr. MMG96] lemme 1.2.2.2 p. 149.

Soit E un espace affine euclidien de dimension n et f une application de E dans E qui conserve les distances. Soient $(x_0, x_1, ..., x_n)$ un repère affine de E et $y_i := f(x_i)$ pour $0 \le i \le n$. On veut montrer que f est un produit de réflexions (i.e. symétries orthogonales hyperplanes), en particulier $f \in Is(E)$, le groupe des isométries affines de E.

(1) Montrer par récurrence sur k l'existence de $g \in Is(E)$ qui est produit de réflexions et telle que $g(x_i) = y_i$ pour $0 \le i \le k$.

Preuve. Montrons cela pour $k = 0$. Si $y_0 = g(x_0)$, $g := Id_E$ convient (produit vide de réflexions) et si $y_0 \neq x_0$ soit H_0 l'hyperplan médiateur de x_0, y_0 et r_{H_0} la réflexion par rapport à H_0, alors $g := r_{H_0}$ convient.

On suppose le résultat satisfait pour $k-1$ i.e; il existe $g \in Is(E)$ avec $g(x_i) = y_i$ pour $0 \le i \le k-1$. On suppose que $z_k := g(x_k) \neq y_k$, Soit H_k l'hyperplan médiateur de y_k, z_k. Puisque $\|x_i - x_j\| = \|y_i - y_j\|$ pour tout i, j, il suit que $\|g(x_i) - g(x_k)\| = \|y_i - y_k\|$ pour tout $0 \le i \le k-1$ et donc par hypothèse de récurrence que $\|y_i - g(x_k)\| = \|y_i - y_k\|$ pour tout $0 \le i \le k-1$. Ainsi y_i, $0 \le i \le k-1$ appartient à l'hyperplan médiateur H_k de $g(y_k)$ et y_k. Soit r_{H_k} la réflexion d'hyperplan H_k alors $r_{H_k} \circ g$ convient. ///

(2) On suppose que $y_i = x_i$ pour $0 \le i \le n$. Montrer que $f = Id_E$.

Preuve. Soit $x \in E$ avec $y := f(x) \neq x$. Soit H l'hyperplan médiateur de x, y, alors $x_i \in H$ pour $0 \le i \le n$ et donc $H = E$, ce qui est une contradiction. ///

(3) Conclure.

Preuve. On a construit dans la question 2, $g \in Is(E)$ qui coïncide avec f sur le repère affine $(x_0, x_1, ..., x_n)$, alors $h := g^{-1} \circ f$ est une application qui conserve les distances et qui est l'identité sur un repère affine ; c'est donc l'identité par la question précédente et donc $f = g$ est produit d'au plus n réflexions. ///

Exercice 2 Le groupe des rotations du tétraèdre régulier, [F. M. 1] $n°133$.

Soit E l'espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère cartésien orthonormé $(O, (\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq 3})$. On appelle tétraèdre régulier de sommets A, B, C, D et d'arête a l'enveloppe convexe de 4 points A, B, C, D formant un repère affine de E et équidistants i.e. a=AB=AC=AD=BC=BD=CD.

(1) Montrer que $O, A_1 = O + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, A_2 = O + \vec{e}_1 + \vec{e}_3, A_3 = O + \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ définit un tétraèdre régulier T d'arête $\sqrt{2}$ (représenter les points A_i).

(2) Soit $M = O + \sum_{1 \leq i \leq 3} x_i \vec{OA_i}$. Calculer $\vec{OM}^2$.

(3) Soit O', A'_1, A'_2, A'_3 un tétraèdre régulier d'arête $\sqrt{2}$. Montrer qu'il existe une unique application affine f de E telle que $f(O) = O'$ et $f(A_i) = A'_i,\ 1 \leq i \leq 3$ et que c'est une isométrie.

(4) On note $Is(T)$ resp. $Is^+(T)$ le groupe des isométries (resp. isométries positives) de E qui laissent stable le tétraèdre T de sommets A, B, C, D.

   (a) Montrer que $Is(T)$ laisse stable l'ensemble des sommets de T (remarquer que les sommets sont les points extrémaux de T).

   (b) Montrer que $Is(T)$ est isomorphe au groupe des permutation S_4 et que $Is^+(T)$ est isomorphe au groupe A_4.

   (c) Lister les éléments de $Is^+(T)$

   (d) On dispose d'une palette de c couleurs. De combien de manières peut-on colorier les 4 faces d'un tétraèdre régulier ?

   (e) On dispose d'une palette de c couleurs. De combien de manières peut-on colorier les 4 sommets d'un tétraèdre régulier ? (construire une bijection entre coloration des faces et coloration des sommets).

Exercice 3 Groupes et propriétés géométriques de l'orbite, [Fr. MMG96] C.1.6.11, partie 00 , [Fr. MMG10] C.1.6.11.

Soient E un espace affine euclidien, $f \in (E)$, G le sous-groupe de (E) engendré par f, $o \in E$. Alors on a les équivalences suivantes :

(1) L'orbite de o sous G est bornée,

(2) Toute orbite sous G d'un point de E est bornée,

(3) f a un point fixe.

Preuve.

— *Montrons que (1) implique (2).*
Soit $m \in E$ avec $f(m) = m$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$ on a $d(m, f^k(o)) = d(f^k(m), f^k(o)) = d(m, o)$ ainsi l'orbite de m sous G est bornée.

— *Montrons que (2) implique (3).*
Il existe $r > 0$ avec $d(o, f^k(o)) \leq r$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $m \in E$ alors $d(f^k(o), f^k(m)) = d(o, m)$ et donc $d(o, f^k(m)) \leq d(o, f^k(o)) + d(f^k(o), f^k(m)) \leq r + d(o, m)$.///

— *Montrons que (3) implique (1).*
Par le théorème de la forme réduite des isométries de E il existe $g \in Is(E)$ avec un point fixe A et $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(\vec{f} - Id_E)$ avec $f = t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}$. Ainsi $f^k(A) = A + k\vec{v}$ et donc $d(A, f^k(A)) = k\|\vec{v}\| \to \infty$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$. Puisque la suite $f^k(A)$ est bornée il suit que $\vec{v} = \vec{0}$ ainsi $f = g$ a un point fixe.///

Exercice 4 Tourniquet sur le cercle, [Fr. MMG96] C.3.6.17 p. 266, [Fr. MMG10] C.3.6.14 avec le groupe des isométries.

Exercice 5 Groupe des isométries de la réunion de 2 droites affines non parallèles et non coplanaires d'un espace affine euclidien, [Fr. MMG96] exercice 1.6.5 p. 169 et [Fr. MMG10] exercice 1.6.7 p. 165.

Exercice 6 Produit de 3 renversements, [Fr. MMG96] p. 168, [Fr. MMG10] p. 164.

Exercice 7 Caractérisation de 3 droites concourantes par les symétries. [F. M. 1] question 1 $n°117$ p. 341.

Exercice 8 Triangle de lumière [F. M. 1] $n°118$ p. 343.

Exercice 9 Le théorème de Jung, [F. M. 1] $n°142$.
Soit E un espace affine euclidien de dimension d et A une partie compacte de E. Si $x \in E$, on note $B(x, r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r.

(1) Soient, $t > 0$, $Y_t := \{y \in E \mid A \subset B(y, t)\}$ et $T := \{t > 0 \mid Y_t \neq \emptyset\}$. Montrer que T est non vide.
(2) Soit $t > 0$ tel que $Y_t \neq \emptyset$, montrer que Y_t est compact.
(3) Soit $t_0 > 0$ tel que $Y_{t_0} \neq \emptyset$. Montrer que $\cap_{t \in T, t \leq t_0} Y_t \neq \emptyset$.
(4) Soit $r := \inf T$ et $x \in \cap_{t \in T} Y_t$. Montrer que $A \subset B(x, r)$.
(5) On suppose que $x, y \in \cap_{t \in T} Y_t$. On suppose que $x \neq y$. Montrer que $A \subset B(\frac{x+y}{2}, r')$ où $r'^2 = r^2 - \|(x - y)/2\|^2$. Conclure que $\cap_{t \in T} Y_t = \{x\}$.
(6) Soit $G(A) := \{\sigma \in Is(E) \mid \sigma(A) = A\}$. Déduire des questions précédentes qu'il existe $x \in E$ avec $\sigma(x) = x$ pour tout $\sigma \in G(A)$.