Chapitre 4: Formes différentielles

Le poly se trouve ici
www.math.u-bordeaux.fr/~pmounoud/

Algèbre tensorielle.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $k \in \mathbb{N}^*$.

Algèbre tensorielle.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $k \in \mathbb{N}^*$.
On rappelle qu'une application $L : E^k \to \mathbf{R}$ est appelée une forme k-linéaire si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a

$$L(v_1, \ldots, av_i + bw_i, \ldots, v_k) = a\, L(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + b\, L(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k),$$

pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, v_i et $w_i \in E$.

Algèbre tensorielle.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $k \in \mathbb{N}^*$.
On rappelle qu'une application $L : E^k \to \mathbf{R}$ est appelée une forme k-linéaire si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a

$$L(v_1, \ldots, av_i + bw_i, \ldots, v_k) = a\, L(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + b\, L(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k),$$

pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, v_i et $w_i \in E$.

Définition 1

Soit L une forme k-linéaire sur E. On dira que L est alternée si,

Algèbre tensorielle.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $k \in \mathbb{N}^*$.
On rappelle qu'une application $L : E^k \to \mathbf{R}$ est appelée une forme k-linéaire si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a

$$L(v_1, \ldots, av_i + bw_i, \ldots, v_k) = a\,L(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + b\,L(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k),$$

pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, v_i et $w_i \in E$.

Définition 1

Soit L une forme k-linéaire sur E. On dira que L est alternée si, pour toute permutation σ de $\{1, \ldots k\}$ et tout $(v_1, \ldots, v_k) \in E^k$, on a

$$L(v_1, \ldots v_k) = \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.

Algèbre tensorielle.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $k \in \mathbb{N}^*$.
On rappelle qu'une application $L : E^k \to \mathbf{R}$ est appelée une forme k-linéaire si pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a

$$L(v_1, \dots, av_i + bw_i, \dots, v_k) = a\, L(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + b\, L(v_1, \dots, w_i, \dots, v_k),$$

pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, v_i et $w_i \in E$.

Définition 1

Soit L une forme k-linéaire sur E. On dira que L est alternée si, pour toute permutation σ de $\{1, \dots k\}$ et tout $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$, on a

$$L(v_1, \dots v_k) = \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.
On notera $\bigwedge^k E^*$ l'espace vectoriel des k-formes linéaires alternées.

On pose $\bigwedge^0 E^* = \mathbf{R}$, une 0-forme linéaire alternée est une constante.

Exemples

Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$.

Exemples

Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$.
Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$.

Exemples

Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$.
Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$.

Exercice 1

Montrer qu'une forme k-linéaire L est alternée si et seulement si $\{v_1, \dots v_k\}$ linéairement dépendants implique $L(v_1, \dots v_k) = 0$.

Exemples

Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$.
Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$.

Exercice 1

Montrer qu'une forme k-linéaire L est alternée si et seulement si $\{v_1, \dots v_k\}$ linéairement dépendants implique $L(v_1, \dots v_k) = 0$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E (donc $\dim E = n$).

Exemples

Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$.
Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$.

Exercice 1

Montrer qu'une forme k-linéaire L est alternée si et seulement si $\{v_1, \dots v_k\}$ linéairement dépendants implique $L(v_1, \dots v_k) = 0$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E (donc $\dim E = n$).
L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbf{R}$ qui à n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de E associe leur déterminant dans la base $\mathcal{B}$ appartient à $\bigwedge^n E^*$.

Exemples

Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$.
Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$.

Exercice 1

Montrer qu'une forme k-linéaire L est alternée si et seulement si $\{v_1, \ldots v_k\}$ linéairement dépendants implique $L(v_1, \ldots v_k) = 0$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E (donc $\dim E = n$).
L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbf{R}$ qui à n vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de E associe leur déterminant dans la base $\mathcal{B}$ appartient à $\bigwedge^n E^*$. C'est l'exemple de base à avoir en tête.

Exemples

Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$.
Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$.

Exercice 1

Montrer qu'une forme k-linéaire L est alternée si et seulement si $\{v_1, \dots v_k\}$ linéairement dépendants implique $L(v_1, \dots v_k) = 0$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E (donc $\dim E = n$).
L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbf{R}$ qui à n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de E associe leur déterminant dans la base $\mathcal{B}$ appartient à $\bigwedge^n E^*$. C'est l'exemple de base à avoir en tête.

On peut le décliner.

Exemples

Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$.
Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$.

Exercice 1

Montrer qu'une forme k-linéaire L est alternée si et seulement si $\{v_1, \dots v_k\}$ linéairement dépendants implique $L(v_1, \dots v_k) = 0$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E (donc $\dim E = n$).
L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbf{R}$ qui à n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de E associe leur déterminant dans la base $\mathcal{B}$ appartient à $\bigwedge^n E^*$. C'est l'exemple de base à avoir en tête.

On peut le décliner. Pour cela, on se donne une projection p sur un sous-espace vectoriel F de E de dimension k et une base $\mathcal{B}_F$ de F.

Exemples

Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$.
Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$.

Exercice 1

Montrer qu'une forme k-linéaire L est alternée si et seulement si $\{v_1, \dots v_k\}$ linéairement dépendants implique $L(v_1, \dots v_k) = 0$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E (donc $\dim E = n$).
L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbf{R}$ qui à n vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de E associe leur déterminant dans la base $\mathcal{B}$ appartient à $\bigwedge^n E^*$. C'est l'exemple de base à avoir en tête.

On peut le décliner. Pour cela, on se donne une projection p sur un sous-espace vectoriel F de E de dimension k et une base $\mathcal{B}_F$ de F. Ainsi l'application :

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \det{}_{\mathcal{B}_F}(p(v_1), \dots, p(v_k)) \text{ appartient à } \bigwedge^k E^*.$$

Proposition 2

Soit $(L_1, \ldots, L_k) \in (E^*)^k$.

Proposition 2

Soit $(L_1, \dots, L_k) \in (E^*)^k$. L'application notée $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ et définie par

$$L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(v_1, \dots v_k) = \det((L_i(v_j))_{i,j}),$$

est une forme k-linéaire alternée ie un élément de $\bigwedge^k E^*$.

Proposition 2

Soit $(L_1, \ldots, L_k) \in (E^*)^k$. L'application notée $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ et définie par

$$L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(v_1, \ldots v_k) = \det((L_i(v_j))_{i,j}),$$

est une forme k-linéaire alternée ie un élément de $\bigwedge^k E^*$.
De plus, cette forme est nulle si et seulement si la famille $\{L_1, \ldots, L_k\}$ est liée et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$L_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge L_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) L_1 \wedge \cdots \wedge L_k.$$

Proposition 2

Soit $(L_1, \dots, L_k) \in (E^*)^k$. L'application notée $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ et définie par

$$L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(v_1, \dots v_k) = \det((L_i(v_j))_{i,j}),$$

est une forme k-linéaire alternée ie un élément de $\bigwedge^k E^*$.
De plus, cette forme est nulle si et seulement si la famille $\{L_1, \dots, L_k\}$ est liée et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$L_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge L_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) L_1 \wedge \cdots \wedge L_k.$$

Preuve On déduit directement des propriétés du déterminant que $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ est k-linéaire et alterné.

Proposition 2

Soit $(L_1, \dots, L_k) \in (E^*)^k$. L'application notée $L_1 \wedge \dots \wedge L_k$ et définie par

$$L_1 \wedge \dots \wedge L_k(v_1, \dots v_k) = \det((L_i(v_j))_{i,j}),$$

est une forme k-linéaire alternée ie un élément de $\bigwedge^k E^*$.
De plus, cette forme est nulle si et seulement si la famille $\{L_1, \dots, L_k\}$ est liée et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$L_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge L_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) L_1 \wedge \dots \wedge L_k.$$

Preuve On déduit directement des propriétés du déterminant que $L_1 \wedge \dots \wedge L_k$ est k-linéaire et alterné.
Si les L_i sont liés, alors quels que soient les v_j, les vecteurs colonnes de la matrice $(L_i(v_j))_{i,j}$ sont liés.

Proposition 2

Soit $(L_1, \dots, L_k) \in (E^*)^k$. L'application notée $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ et définie par

$$L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(v_1, \dots v_k) = \det((L_i(v_j))_{i,j}),$$

est une forme k-linéaire alternée ie un élément de $\bigwedge^k E^*$.
De plus, cette forme est nulle si et seulement si la famille $\{L_1, \dots, L_k\}$ est liée et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$L_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge L_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) L_1 \wedge \cdots \wedge L_k.$$

Preuve On déduit directement des propriétés du déterminant que $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ est k-linéaire et alterné.
Si les L_i sont liés, alors quels que soient les v_j, les vecteurs colonnes de la matrice $(L_i(v_j))_{i,j}$ sont liés.
Réciproquement, si elles forment une famille libre, on peut trouver des vecteurs $v_1, \dots, v_k$ tels que $L_i(v_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Proposition 2

Soit $(L_1, \dots, L_k) \in (E^*)^k$. L'application notée $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ et définie par

$$L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(v_1, \dots v_k) = \det((L_i(v_j))_{i,j}),$$

est une forme k-linéaire alternée ie un élément de $\bigwedge^k E^*$.
De plus, cette forme est nulle si et seulement si la famille $\{L_1, \dots, L_k\}$ est liée et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$L_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge L_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) L_1 \wedge \cdots \wedge L_k.$$

Preuve On déduit directement des propriétés du déterminant que $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ est k-linéaire et alterné.
Si les L_i sont liés, alors quels que soient les v_j, les vecteurs colonnes de la matrice $(L_i(v_j))_{i,j}$ sont liés.
Réciproquement, si elles forment une famille libre, on peut trouver des vecteurs $v_1, \dots, v_k$ tels que $L_i(v_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
On a alors $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(v_1, \dots, v_k) = 1 \neq 0$.

Proposition 2

Soit $(L_1, \ldots, L_k) \in (E^*)^k$. L'application notée $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ et définie par

$$L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(v_1, \ldots v_k) = \det((L_i(v_j))_{i,j}),$$

est une forme k-linéaire alternée ie un élément de $\bigwedge^k E^*$.
De plus, cette forme est nulle si et seulement si la famille $\{L_1, \ldots, L_k\}$ est liée et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$L_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge L_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) L_1 \wedge \cdots \wedge L_k.$$

Preuve On déduit directement des propriétés du déterminant que $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ est k-linéaire et alterné.
Si les L_i sont liés, alors quels que soient les v_j, les vecteurs colonnes de la matrice $(L_i(v_j))_{i,j}$ sont liés.
Réciproquement, si elles forment une famille libre, on peut trouver des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ tels que $L_i(v_j) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
On a alors $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(v_1, \ldots, v_k) = 1 \neq 0$.
Appliquer une permutation σ aux lignes d'une matrice multiplie son déterminant par $\varepsilon(\sigma)$. Donc pour tout $v_1, \ldots, v_k$, $\det(L_{\sigma(i)}(v_j)_{i,j}) = \varepsilon(\sigma) \det(L_i(v_j)_{i,j})$. $\square$

Exemple 3

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E de base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ des entiers.

Exemple 3

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E de base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$,
$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ des entiers.
On a $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 1$ si et seulement si $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots j_k)$ et $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0$ sinon.

Exemple 3

Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E de base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$,
$1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ des entiers.
On a $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 1$ si et seulement si $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots j_k)$ et $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0$ sinon.
Ainsi la famille $\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \,|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ est libre.

Exemple 3

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E de base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ des entiers.
On a $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = 1$ si et seulement si $(i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots j_k)$ et $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = 0$ sinon.
Ainsi la famille $\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \,|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ est libre.

Théorème 4

Soit $L \in \bigwedge^k E^*$. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E de base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ alors

$$L = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*.$$

Preuve

On note $v_j = \sum_{i=1}^{n} v_j^i e_i$.

Preuve

On note $v_j = \sum_{i=1}^{n} v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} v_1^{i_1} \ldots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).$$

Preuve

On note $v_j = \sum_{i=1}^{n} v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1,\dots,i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Si les $i_1, \dots, i_k$ ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$.

Preuve

On note $v_j = \sum_{i=1}^{n} v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Si les $i_1, \dots, i_k$ ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$. S'ils sont tous distincts il existe une unique permutation σ telle que $i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(k)}$.

Preuve

On note $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Si les $i_1, \dots, i_k$ ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$. S'ils sont tous distincts il existe une unique permutation σ telle que $i_{\sigma(1)} < \cdots < i_{\sigma(k)}$. On a alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma) L(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}})$.

Preuve

On note $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Si les $i_1, \dots, i_k$ ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$. S'ils sont tous distincts il existe une unique permutation σ telle que $i_{\sigma(1)} < \cdots < i_{\sigma(k)}$. On a alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma) L(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}})$. D'où

$$L(v_1, \dots, v_k) \quad = \quad \sum_{i_1 < \cdots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \dots v_k^{i_{\sigma(k)}}$$

Preuve

On note $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Si les $i_1, \dots, i_k$ ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$. S'ils sont tous distincts il existe une unique permutation σ telle que $i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(k)}$. On a alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma) L(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}})$. D'où

$$\begin{aligned} L(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \dots v_k^{i_{\sigma(k)}} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)}^{i_1} \dots v_{\sigma(k)}^{i_k} \end{aligned}$$

Preuve

On note $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Si les $i_1, \dots, i_k$ ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$. S'ils sont tous distincts il existe une unique permutation σ telle que $i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(k)}$. On a alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma) L(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}})$. D'où

$$\begin{aligned} L(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \dots v_k^{i_{\sigma(k)}} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)}^{i_1} \dots v_{\sigma(k)}^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(v_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(v_{\sigma(k)}) \end{aligned}$$

Preuve

On note $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Si les $i_1, \dots, i_k$ ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$. S'ils sont tous distincts il existe une unique permutation σ telle que $i_{\sigma(1)} < \cdots < i_{\sigma(k)}$. On a alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma) L(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}})$. D'où

$$\begin{aligned}
L(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \dots v_k^{i_{\sigma(k)}} \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)}^{i_1} \dots v_{\sigma(k)}^{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(v_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*(v_1, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

Preuve

On note $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1,\dots,i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Si les $i_1, \dots, i_k$ ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$. S'ils sont tous distincts il existe une unique permutation σ telle que $i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(k)}$. On a alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma) L(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}})$. D'où

$$\begin{aligned}
L(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \dots v_k^{i_{\sigma(k)}} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)}^{i_1} \dots v_{\sigma(k)}^{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(v_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(v_1, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 5

Si $k > n$ l'espace vectoriel $\bigwedge^k E^*$ est réduit à 0.

Corollaire 5

Si $k > n$ l'espace vectoriel $\bigwedge^k E^*$ est réduit à 0.
Si $1 \leq k \leq n$, alors la famille $\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^* \,|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ est une base de $\bigwedge^k E^*$ et $\dim\left(\bigwedge^k E^*\right) = \binom{n}{k}$.

Corollaire 5

Si $k > n$ l'espace vectoriel $\bigwedge^k E^*$ est réduit à 0.
Si $1 \leq k \leq n$, alors la famille $\{e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k} \,|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$ est une base de $\bigwedge^k E^*$ et $\dim\left(\bigwedge^k E^*\right) = \binom{n}{k}$.

Preuve : Si $k > n$ il n'existe pas de suites $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Le théorème 4 nous dit que cette famille engendre $\bigwedge^k E^*$. On a vu à l'exemple 3 qu'elle est libre. Enfin son cardinal est $\binom{n}{k}$ $\square$

On admet qu'il existe une opération sur les formes linéaires alternées, appelée produit extérieur et notée $\wedge$ ayant les propriétés suivantes :

- si $L \in \bigwedge^k E^*$ et $T \in \bigwedge^\ell E^*$ alors $L \wedge T \in \bigwedge^{k+\ell} E^*$,
- si L et T sont dans E^* alors $L \wedge T$ est la forme définie à la proposition 2,
- si $c \in \mathbf{R}$ et L et T sont des formes alternées alors $(cL) \wedge T = L \wedge (cT) = c(L \wedge T)$.
- si L, T et U sont des formes alternées alors
  $(L \wedge T) \wedge U = L \wedge (T \wedge U)$ (associativité)
  $(L + T) \wedge U = (L \wedge U) + (T \wedge U)$ si L et T sont de même ordre
  $U \wedge (L + T) = (U \wedge L) + (U \wedge T)$ si L et T sont de même ordre (distributivité)

Pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité on note dorénavant $\underline{i}$ le multi-indice $i_1, \ldots, i_k$.

On admet qu'il existe une opération sur les formes linéaires alternées, appelée produit extérieur et notée $\wedge$ ayant les propriétés suivantes :

- si $L \in \bigwedge^k E^*$ et $T \in \bigwedge^\ell E^*$ alors $L \wedge T \in \bigwedge^{k+\ell} E^*$,
- si L et T sont dans E^* alors $L \wedge T$ est la forme définie à la proposition 2,
- si $c \in \mathbf{R}$ et L et T sont des formes alternées alors $(cL) \wedge T = L \wedge (cT) = c(L \wedge T)$.
- si L, T et U sont des formes alternées alors $(L \wedge T) \wedge U = L \wedge (T \wedge U)$ (associativité)
  $(L + T) \wedge U = (L \wedge U) + (T \wedge U)$ si L et T sont de même ordre
  $U \wedge (L + T) = (U \wedge L) + (U \wedge T)$ si L et T sont de même ordre (distributivité)

Pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité on note dorénavant $\underline{i}$ le multi-indice $i_1, \ldots, i_k$.
Si $L = \sum_{\underline{i}} L_{\underline{i}}\ e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k} \in \bigwedge^k E^*$ et $T = \sum_{\underline{j}} T_{\underline{j}}\ e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_\ell} \in \bigwedge^\ell E^*$,

On admet qu'il existe une opération sur les formes linéaires alternées, appelée produit extérieur et notée $\wedge$ ayant les propriétés suivantes :

- si $L \in \bigwedge^k E^*$ et $T \in \bigwedge^\ell E^*$ alors $L \wedge T \in \bigwedge^{k+\ell} E^*$,
- si L et T sont dans E^* alors $L \wedge T$ est la forme définie à la proposition 2,
- si $c \in \mathbf{R}$ et L et T sont des formes alternées alors $(cL) \wedge T = L \wedge (cT) = c(L \wedge T)$.
- si L, T et U sont des formes alternées alors
  $(L \wedge T) \wedge U = L \wedge (T \wedge U)$ (associativité)
  $(L + T) \wedge U = (L \wedge U) + (T \wedge U)$ si L et T sont de même ordre
  $U \wedge (L + T) = (U \wedge L) + (U \wedge T)$ si L et T sont de même ordre (distributivité)

Pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité on note dorénavant $\underline{i}$ le multi-indice $i_1, \ldots, i_k$.
Si $L = \sum_{\underline{i}} L_{\underline{i}}\ e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k} \in \bigwedge^k E^*$ et $T = \sum_{\underline{j}} T_{\underline{j}}\ e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_\ell} \in \bigwedge^\ell E^*$, alors

$$L \wedge T = \sum_{\underline{i},\underline{j}} L_{\underline{i}} T_{\underline{j}}\ e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k} \wedge e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_\ell}.$$

On voit facilement que $\boxed{L \wedge T = (-1)^{k\ell}\, T \wedge L.}$

On admet qu'il existe une opération sur les formes linéaires alternées, appelée produit extérieur et notée $\wedge$ ayant les propriétés suivantes :

- si $L \in \bigwedge^k E^*$ et $T \in \bigwedge^\ell E^*$ alors $L \wedge T \in \bigwedge^{k+\ell} E^*$,
- si L et T sont dans E^* alors $L \wedge T$ est la forme définie à la proposition 2,
- si $c \in \mathbf{R}$ et L et T sont des formes alternées alors $(cL) \wedge T = L \wedge (cT) = c(L \wedge T)$.
- si L, T et U sont des formes alternées alors
  $(L \wedge T) \wedge U = L \wedge (T \wedge U)$ (associativité)
  $(L + T) \wedge U = (L \wedge U) + (T \wedge U)$ si L et T sont de même ordre
  $U \wedge (L + T) = (U \wedge L) + (U \wedge T)$ si L et T sont de même ordre (distributivité)

Pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité on note dorénavant $\underline{i}$ le multi-indice $i_1, \ldots, i_k$.
Si $L = \sum_{\underline{i}} L_{\underline{i}}\ e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k} \in \bigwedge^k E^*$ et $T = \sum_{\underline{j}} T_{\underline{j}}\ e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_\ell} \in \bigwedge^\ell E^*$, alors

$$L \wedge T = \sum_{\underline{i},\underline{j}} L_{\underline{i}} T_{\underline{j}}\ e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k} \wedge e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_\ell}.$$

On voit facilement que $\boxed{L \wedge T = (-1)^{k\ell} T \wedge L.}$

Formes différentielles

Définition 6

Une forme différentielle de degré k (ou k-forme différentielle) lisse sur un ouvert U d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est une application lisse de U dans $\bigwedge^k E^*$.
L'espace vectoriel des formes de degré k sur U est noté $\Omega^k(U)$.

Formes différentielles

Définition 6

Une forme différentielle de degré k (ou k-forme différentielle) lisse sur un ouvert U d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est une application lisse de U dans $\bigwedge^k E^*$.
L'espace vectoriel des formes de degré k sur U est noté $\Omega^k(U)$.

Un élément de $\Omega^0(U)$ est une fonction lisse de U dans $\mathbf{R}$.
La différentielle d'une fonction lisse f de U dans $\mathbf{R}$ appartient à $\Omega^1(U)$, on la notera df.

Formes différentielles

Définition 6

Une forme différentielle de degré k (ou k-forme différentielle) lisse sur un ouvert U d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est une application lisse de U dans $\bigwedge^k E^*$.
L'espace vectoriel des formes de degré k sur U est noté $\Omega^k(U)$.

Un élément de $\Omega^0(U)$ est une fonction lisse de U dans $\mathbf{R}$.
La différentielle d'une fonction lisse f de U dans $\mathbf{R}$ appartient à $\Omega^1(U)$, on la notera df.

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale et $(x^1, \ldots, x^n)$ les coordonnées associées.
La différentielle de e_i^*, ie de l'application i^{eme} coordonnée $x \mapsto x^i$, est constante, égale à e_i^* en tous points.

Formes différentielles

Définition 6

Une forme différentielle de degré k (ou k-forme différentielle) lisse sur un ouvert U d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est une application lisse de U dans $\bigwedge^k E^*$.
L'espace vectoriel des formes de degré k sur U est noté $\Omega^k(U)$.

Un élément de $\Omega^0(U)$ est une fonction lisse de U dans $\mathbf{R}$.
La différentielle d'une fonction lisse f de U dans $\mathbf{R}$ appartient à $\Omega^1(U)$, on la notera df.

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale et $(x^1, \ldots, x^n)$ les coordonnées associées.
La différentielle de e_i^*, ie de l'application i^{eme} coordonnée $x \mapsto x^i$, est constante, égale à e_i^* en tous points.
On note donc dx^i la 1-forme constante $x \mapsto e_i^*$.

Formes différentielles

Définition 6

Une forme différentielle de degré k (ou k-forme différentielle) lisse sur un ouvert U d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est une application lisse de U dans $\bigwedge^k E^*$.
L'espace vectoriel des formes de degré k sur U est noté $\Omega^k(U)$.

Un élément de $\Omega^0(U)$ est une fonction lisse de U dans $\mathbf{R}$.
La différentielle d'une fonction lisse f de U dans $\mathbf{R}$ appartient à $\Omega^1(U)$, on la notera df.

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale et $(x^1, \ldots, x^n)$ les coordonnées associées.
La différentielle de e_i^*, ie de l'application i^{eme} coordonnée $x \mapsto x^i$, est constante, égale à e_i^* en tous points.
On note donc dx^i la 1-forme constante $x \mapsto e_i^*$.
La différentielle de f s'écrit donc

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

De même, pour tout $\{i_1, \ldots, i_k\} \in \{1, \ldots, n\}$, on note $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, la forme différentielle constante valant $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$ en tout point.

De même, pour tout $\{i_1, \dots, i_k\} \in \{1, \dots, n\}$, on note $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, la forme différentielle constante valant $e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}$ en tout point.

Par conséquent, si $\alpha \in \Omega^k(U)$ alors il existe $\binom{n}{k}$ fonctions **lisses** $\alpha_{i_1,\dots,i_k}$ telle que

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

De même, pour tout $\{i_1, \ldots, i_k\} \in \{1, \ldots, n\}$, on note $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, la forme différentielle constante valant $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$ en tout point.

Par conséquent, si $\alpha \in \Omega^k(U)$ alors il existe $\binom{n}{k}$ fonctions **lisses** $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ telle que

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

La définition du produit extérieur s'étend bien aux formes différentielles :
si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$, on pose $(\alpha \wedge \beta)_x = (\alpha_x \wedge \beta_x)$.

De même, pour tout $\{i_1, \dots, i_k\} \in \{1, \dots, n\}$, on note $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, la forme différentielle constante valant $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*$ en tout point.

Par conséquent, si $\alpha \in \Omega^k(U)$ alors il existe $\binom{n}{k}$ fonctions **lisses** $\alpha_{i_1,\dots,i_k}$ telle que

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

La définition du produit extérieur s'étend bien aux formes différentielles :
si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$, on pose $(\alpha \wedge \beta)_x = (\alpha_x \wedge \beta_x)$. On a donc

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\underline{i},\underline{j}} \alpha_{\underline{i}} \beta_{\underline{j}} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_\ell}.$$

De même, pour tout $\{i_1, \ldots, i_k\} \in \{1, \ldots, n\}$, on note $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, la forme différentielle constante valant $e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_k}$ en tout point.

Par conséquent, si $\alpha \in \Omega^k(U)$ alors il existe $\binom{n}{k}$ fonctions **lisses** $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ telle que

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

La définition du produit extérieur s'étend bien aux formes différentielles :
si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$, on pose $(\alpha \wedge \beta)_x = (\alpha_x \wedge \beta_x)$. On a donc

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\underline{i},\underline{j}} \alpha_{\underline{i}} \beta_{\underline{j}} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_\ell}.$$

On voit en particulier que les composantes de $\alpha \wedge \beta$ sont lisses et donc $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(U)$.

Image réciproque

Définition 7

Soit $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts des espaces vectoriels E et F et soit f une application lisse de U dans V.

Image réciproque

Définition 7

Soit $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts des espaces vectoriels E et F et soit f une application lisse de U dans V. Soit $\alpha \in \Omega^k(V)$.

Image réciproque

Définition 7

Soit $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts des espaces vectoriels E et F et soit f une application lisse de U dans V. Soit $\alpha \in \Omega^k(V)$.
L'image réciproque par f de α, notée $f^*\alpha$, est la k-forme sur U définie par

$$(f^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(x)}(D_x f(v_1), \dots, D_x f(v_k)),$$

pour tout $v_1, \dots v_k$ dans E.

Image réciproque

Définition 7

Soit $U \subset E$ et $V \subset F$ des ouverts des espaces vectoriels E et F et soit f une application lisse de U dans V. Soit $\alpha \in \Omega^k(V)$.
L'image réciproque par f de α, notée $f^*\alpha$, est la k-forme sur U définie par

$$(f^*\alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) = \alpha_{f(x)}(D_x f(v_1), \ldots, D_x f(v_k)),$$

pour tout $v_1, \ldots v_k$ dans E.

Soit $y^1, \ldots, y^m$ des coordonnées sur V (provenant d'une base de F) et $(f^1, \ldots, f^m)$ les composantes de f. On voit que $dy^i(D_x f(v)) = (df^i)_x(v)$.
Ainsi si $\boxed{f^*(dy^i) = df^i.}$ De même,

$$\begin{aligned}(f^* dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k})_x(v_1, \ldots v_k) &= (dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k})_{f(x)}(D_x f(v_1), \ldots D_x f(v_k)) \\ &= \det((dy^{i_s}(D_x f(v_t))_{s,t}) = \det((df_x^{i_s}(v_t))_{s,t}) \\ &= (df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{1_k})_x(v_1, \ldots, v_k)\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\boxed{f^*(dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}) = df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{1_k}}$

On en déduit que si $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$, alors

$$f^*\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} (\alpha_{\underline{i}} \circ f)\; df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{i_k}.$$

On en déduit que si $\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \alpha_{i_1, \ldots, i_k} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$, alors

$$f^* \alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} (\alpha_{\underline{i}} \circ f) \; df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{i_k}.$$

Qu'il reste à développer grâce à la multilinéarité du produit extérieur pour avoir une expression en fonction des dx^i.

On en déduit que si $\alpha = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$, alors

$$f^*\alpha = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} (\alpha_{\underline{i}} \circ f)\; df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{i_k}.$$

Qu'il reste à développer grâce à la multilinéarité du produit extérieur pour avoir une expression en fonction des dx^i.

Exemple 8

Prenons $U = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}_+^*$ et $f(t) = e^t$. Alors $f^*(dx/x) = \frac{1}{f(t)} df(t) = dt$.

On en déduit que si $\alpha = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq m} \alpha_{i_1,\dots,i_k} dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_k}$, alors

$$f^*\alpha = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq m} (\alpha_{\underline{i}}\circ f)\; df^{i_1}\wedge\cdots\wedge df^{i_k}.$$

Qu'il reste à développer grâce à la multilinéarité du produit extérieur pour avoir une expression en fonction des dx^i.

Exemple 8

Prenons $U=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{R}_+^*$ et $f(t)=e^t$. Alors $f^*(dx/x)=\frac{1}{f(t)}df(t)=dt$.
Si $U=V=\mathbf{R}^2$ et $f(u,v)=(u\cos v, u\sin v)$, on a

$$f^*(dx^1\wedge dx^2) = (\cos v\;\, du - u\sin v\;\, dv)\wedge(\sin v\;\, du + u\cos v\;\, dv) = u\;\, du\wedge dv.$$

On en déduit que si $\alpha = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$, alors

$$f^*\alpha = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m} (\alpha_{\underline{i}} \circ f)\ df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{i_k}.$$

Qu'il reste à développer grâce à la multilinéarité du produit extérieur pour avoir une expression en fonction des dx^i.

Exemple 8

Prenons $U = \mathbf{R}$, $V = \mathbf{R}_+^*$ et $f(t) = e^t$. Alors $f^*(dx/x) = \frac{1}{f(t)} df(t) = dt$.
Si $U = V = \mathbf{R}^2$ et $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$, on a

$$f^*(dx^1 \wedge dx^2) = (\cos v\ du - u\sin v\ dv) \wedge (\sin v\ du + u\cos v\ dv) = u\ du \wedge dv.$$

Plus généralement (exercice) si U et V sont des ouverts de même dimension n

$$f^*(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n) = (\det D_x f)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n).$$

Proposition 9

Soit $f : U \to V$ une application lisse.

Proposition 9

Soit $f : U \to V$ une application lisse.

1. Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$, on a

$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$

Proposition 9

Soit $f : U \to V$ une application lisse.

1. Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$, on a
$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$
2. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$, on a
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$

Proposition 9

Soit $f : U \to V$ une application lisse.

1. Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$, on a
$$f^*(\alpha+\beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$
2. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$, on a
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$
3. Soient $g : V \to W$ est une autre application lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$. Alors,
$$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

Proposition 9

Soit $f : U \to V$ une application lisse.

1. Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$, on a
$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$
2. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$, on a
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$
3. Soient $g : V \to W$ est une autre application lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$. Alors,
$$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

Preuve : 1) et 2) en exercice, prouvons 3)

Proposition 9

Soit $f : U \to V$ une application lisse.

1. Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$, on a
$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$
2. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$, on a
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$
3. Soient $g : V \to W$ est une autre application lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$. Alors,
$$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

Preuve : 1) et 2) en exercice, prouvons 3)

$$((g \circ f)^*\alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) \quad = \quad \alpha_{g\circ f(x)}(D_x(g \circ f)(v_1), \ldots, D_x(g \circ f)(v_k))$$

Proposition 9

Soit $f : U \to V$ une application lisse.

1. Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$, on a
$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$
2. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$, on a
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$
3. Soient $g : V \to W$ est une autre application lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$. Alors,
$$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

Preuve : 1) et 2) en exercice, prouvons 3)

$$\begin{aligned} ((g \circ f)^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) &= \alpha_{g \circ f(x)}(D_x(g \circ f)(v_1), \dots, D_x(g \circ f)(v_k)) \\ &= \alpha_{g \circ f(x)}(D_{f(x)}g(D_x f(v_1)), \dots, D_{f(x)}g(D_x f(v_k))) \end{aligned}$$

Proposition 9

Soit $f : U \to V$ une application lisse.

1. Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$, on a
$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$
2. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$, on a
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$
3. Soient $g : V \to W$ est une autre application lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$. Alors,
$$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

Preuve : 1) et 2) en exercice, prouvons 3)

$$\begin{aligned}
((g \circ f)^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) &= \alpha_{g \circ f(x)}(D_x(g \circ f)(v_1), \dots, D_x(g \circ f)(v_k)) \\
&= \alpha_{g \circ f(x)}(D_{f(x)}g(D_x f(v_1)), \dots, D_{f(x)}g(D_x f(v_k))) \\
&= (g^*\alpha)_{f(x)}(D_x f(v_1), \dots, D_x f(v_k))
\end{aligned}$$

Proposition 9

Soit $f : U \to V$ une application lisse.

1. Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$, on a
$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$
2. Pour tout $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$, on a
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$
3. Soient $g : V \to W$ est une autre application lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$. Alors,
$$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

Preuve : 1) et 2) en exercice, prouvons 3)

$$\begin{aligned}
((g\circ f)^*\alpha)_x(v_1,\dots,v_k) &= \alpha_{g\circ f(x)}(D_x(g\circ f)(v_1),\dots,D_x(g\circ f)(v_k)) \\
&= \alpha_{g\circ f(x)}(D_{f(x)}g(D_xf(v_1)),\dots,D_{f(x)}g(D_xf(v_k))) \\
&= (g^*\alpha)_{f(x)}(D_xf(v_1),\dots,D_xf(v_k)) \\
&= (f^*(g^*\alpha))_x(v_1,\dots,v_k) \qquad \square
\end{aligned}$$

Différentielle extérieure

On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$, ie on pose $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$. La différentielle (usuelle) permet d'associer une 1 forme à une 0 forme (ie une fonction). On étend ceci aux k-formes différentielles.

Différentielle extérieure

On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$, ie on pose $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$. La différentielle (usuelle) permet d'associer une 1 forme à une 0 forme (ie une fonction). On étend ceci aux k-formes différentielles.

Théorème 10

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E. Il existe une application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ et une seule ayant les propriétés suivantes :

Différentielle extérieure

On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$, ie on pose $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$. La différentielle (usuelle) permet d'associer une 1 forme à une 0 forme (ie une fonction). On étend ceci aux k-formes différentielles.

Théorème 10

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E. Il existe une application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ et une seule ayant les propriétés suivantes :

i) *si $\alpha \in \Omega^k(U)$ alors $d\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$.*

Différentielle extérieure

On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$, ie on pose $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$. La différentielle (usuelle) permet d'associer une 1 forme à une 0 forme (ie une fonction). On étend ceci aux k-formes différentielles.

Théorème 10

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E. Il existe une application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ et une seule ayant les propriétés suivantes :

i) *si $\alpha \in \Omega^k(U)$ alors $d\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$.*

ii) *la restriction de d à $\Omega^0(U)$ est la différentielle des fonctions.*

Différentielle extérieure

On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$, ie on pose $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(U)$. La différentielle (usuelle) permet d'associer une 1 forme à une 0 forme (ie une fonction). On étend ceci aux k-formes différentielles.

Théorème 10

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E. Il existe une application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ et une seule ayant les propriétés suivantes :

i) *si $\alpha \in \Omega^k(U)$ alors $d\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$.*

ii) *la restriction de d à $\Omega^0(U)$ est la différentielle des fonctions.*

iii) *si $\alpha \in \Omega^k(U)$, alors $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.*

Différentielle extérieure

On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$, ie on pose $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$. La différentielle (usuelle) permet d'associer une 1 forme à une 0 forme (ie une fonction). On étend ceci aux k-formes différentielles.

Théorème 10

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E. Il existe une application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ et une seule ayant les propriétés suivantes :

i) *si $\alpha \in \Omega^k(U)$ alors $d\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$.*

ii) *la restriction de d à $\Omega^0(U)$ est la différentielle des fonctions.*

iii) *si $\alpha \in \Omega^k(U)$, alors $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.*

iv) *$d \circ d = 0$.*

Preuve :

Montrons d'abord l'unicité.

Preuve :

Montrons d'abord l'unicité. Si $d \circ d = 0$ on a $d(dx^i) = 0$. En utilisant iii) on a donc $d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0$ pour tout $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. On en déduit que

$$d(f\ dx^{i_1} \wedge dx^{i_k}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Preuve :

Montrons d'abord l'unicité. Si $d \circ d = 0$ on a $d(dx^i) = 0$. En utilisant iii) on a donc $d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0$ pour tout $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. On en déduit que

$$d(f \; dx^{i_1} \wedge dx^{i_k}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ s'écrit

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \alpha_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

en utilisant la linéarité de d on a forcément

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} d\alpha_{i_1, \ldots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \qquad (\star)$$

Preuve :

Montrons d'abord l'unicité. Si $d \circ d = 0$ on a $d(dx^i) = 0$. En utilisant iii) on a donc $d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0$ pour tout $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. On en déduit que

$$d(f\ dx^{i_1} \wedge dx^{i_k}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ s'écrit

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

en utilisant la linéarité de d on a forcément

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} d\alpha_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \qquad (\star)$$

Il faut voir maintenant que cette formule convient...

L'expression $(\star)$ est bien linéaire, elle vérifie clairement i) et ii).

L'expression $(\star)$ est bien linéaire, elle vérifie clairement i) et ii).Pour prouver iii), il suffit de considérer le cas où

$$\alpha = f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{et} \quad \beta = g\ dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}.$$

L'expression $(\star)$ est bien linéaire, elle vérifie clairement i) et ii).Pour prouver iii), il suffit de considérer le cas où

$$\alpha = f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{et} \quad \beta = g\ dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}.$$

Alors

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ &= (f\ dg + g\ df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \end{aligned}$$

L'expression ($\star$) est bien linéaire, elle vérifie clairement i) et ii).Pour prouver iii), il suffit de considérer le cas où

$$\alpha = f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{et} \quad \beta = g\ dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} d(\alpha \wedge \beta) & = & d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ & = & (f\ dg + g\ df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ d\alpha \wedge \beta & = & gdf \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \end{array}$$

L'expression ($\star$) est bien linéaire, elle vérifie clairement i) et ii).Pour prouver iii), il suffit de considérer le cas où

$$\alpha = f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{et} \quad \beta = g\ dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} d(\alpha \wedge \beta) & = & d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ & = & (f\ dg + g\ df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ d\alpha \wedge \beta & = & gdf \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ \alpha \wedge d\beta & = & f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dg \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ & = & (-1)^k f\ dg \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \end{array}$$

L'expression $(\star)$ est bien linéaire, elle vérifie clairement i) et ii).Pour prouver iii), il suffit de considérer le cas où

$$\alpha = f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{et} \quad \beta = g\ dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= (f\ dg + g\ df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
d\alpha \wedge \beta &= gdf \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
\alpha \wedge d\beta &= f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dg \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= (-1)^k f\ dg \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}
\end{aligned}$$

Voyons que $d \circ d = 0$.

Commençons par les fonctions.

Commençons par les fonctions. On a $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. D'aprés $(\star)$, on a donc

$$d(df) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} (\frac{\partial f}{\partial x^i}) dx^j \right) \wedge dx^i$$

Commençons par les fonctions. On a $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. D'aprés $(\star)$, on a donc

$$d(df) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} (\frac{\partial f}{\partial x^i}) dx^j \right) \wedge dx^i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i$$
$$= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i = 0,$$

d'aprés le théorème de Schwarz.

Commençons par les fonctions. On a $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. D'aprés $(\star)$, on a donc

$$d(df) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} (\frac{\partial f}{\partial x^i}) dx^j \right) \wedge dx^i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i$$
$$= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i = 0,$$

d'aprés le théorème de Schwarz.
D'après ce qui précède, pour toute k-forme α

$$d(d\alpha) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} d(d\alpha_{i_1,\ldots,i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

Commençons par les fonctions. On a $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. D'aprés $(\star)$, on a donc

$$d(df) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} (\frac{\partial f}{\partial x^i}) dx^j \right) \wedge dx^i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i$$
$$= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i = 0,$$

d'aprés le théorème de Schwarz.
D'après ce qui précède, pour toute k-forme α

$$d(d\alpha) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} d(d\alpha_{i_1,\ldots,i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = 0.$$

Ce qui termine la preuve du théorème.

Exemple 11

Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et si $\alpha = Pdx + Bdy + Cdz$, alors

$$d\alpha = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dz \wedge dx.$$

Exemple 11

Si U est un ouvert de $\mathbf{R}^3$ et si $\alpha = Pdx + Bdy + Cdz$, alors

$$d\alpha = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dz \wedge dx.$$

Si $\beta = P(dy \wedge dz) + Q(dz \wedge dx) + R(dx \wedge dy)$,

$$d\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Définition 12

L'opérateur ainsi défini s'appelle la différentielle extérieure.
Si $d\alpha = 0$ on dit que α est fermée. S'il existe β telle que $d\beta = \alpha$. On dit que α est exacte.

Définition 12

L'opérateur ainsi défini s'appelle la différentielle extérieure.
Si $d\alpha = 0$ on dit que α est fermée. S'il existe β telle que $d\beta = \alpha$. On dit que α est exacte.

On peut donc exprimer la proposition $d \circ d = 0$ par
$\boxed{\text{une forme exacte est fermée.}}$ Attention, la réciproque est fausse.
Comme on le verra plus tard la 1-forme sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ donnée par $\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ est fermée mais non exacte.

Définition 12

L'opérateur ainsi défini s'appelle la différentielle extérieure.
Si $d\alpha = 0$ on dit que α est fermée. S'il existe β telle que $d\beta = \alpha$. On dit que α est exacte.

On peut donc exprimer la proposition $d \circ d = 0$ par
$\boxed{\text{une forme exacte est fermée.}}$ Attention, la réciproque est fausse.
Comme on le verra plus tard la 1-forme sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ donnée par $\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ est fermée mais non exacte.

Proposition 13

La différentielle extérieure et l'image réciproque commutent, c'est-à-dire si U et V sont des ouverts d'espaces vectoriels et si φ est une application lisse de U dans V, alors pour tout $\alpha \in \Omega(V)$, on a

$$\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha)$$

Preuve :

Commençons par les 0-formes, ie les fonctions. Dans ce cas la formule devient

$$d(f \circ \varphi) = \varphi^* df,$$

où l'on reconnait le théorème de dérivation composée.

Preuve :

Commençons par les 0-formes, ie les fonctions. Dans ce cas la formule devient

$$d(f \circ \varphi) = \varphi^* df,$$

où l'on reconnait le théorème de dérivation composée.
Par linéarité il suffit de montrer le résultat pour les formes α qui s'écrivent $f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$.

Preuve :

Commençons par les 0-formes, ie les fonctions. Dans ce cas la formule devient

$$d(f \circ \varphi) = \varphi^* df,$$

où l'on reconnait le théorème de dérivation composée.
Par linéarité il suffit de montrer le résultat pour les formes α qui s'écrivent $f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. On a vu que

$$\varphi^*(f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = (f \circ \varphi) d\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_k},$$

où les φ^i sont les composantes de φ. On a donc

$$d(\varphi^*\alpha) \quad = \quad d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_k},$$

Preuve :

Commençons par les 0-formes, ie les fonctions. Dans ce cas la formule devient

$$d(f \circ \varphi) = \varphi^* df,$$

où l'on reconnait le théorème de dérivation composée.
Par linéarité il suffit de montrer le résultat pour les formes α qui s'écrivent $f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. On a vu que

$$\varphi^*(f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = (f \circ \varphi) d\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_k},$$

où les φ^i sont les composantes de φ. On a donc

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\alpha) &= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_k}, \\ &= (\varphi^* df) \wedge \varphi^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \end{aligned}$$

Preuve :

Commençons par les 0-formes, ie les fonctions. Dans ce cas la formule devient

$$d(f \circ \varphi) = \varphi^* df,$$

où l'on reconnait le théorème de dérivation composée.
Par linéarité il suffit de montrer le résultat pour les formes α qui s'écrivent $f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. On a vu que

$$\varphi^*(f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = (f \circ \varphi) d\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_k},$$

où les φ^i sont les composantes de φ. On a donc

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\alpha) &= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_k}, \\ &= (\varphi^* df) \wedge \varphi^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &= \varphi^*(d\alpha) \qquad \square \end{aligned}$$

Preuve :

Commençons par les 0-formes, ie les fonctions. Dans ce cas la formule devient

$$d(f \circ \varphi) = \varphi^* df,$$

où l'on reconnait le théorème de dérivation composée.
Par linéarité il suffit de montrer le résultat pour les formes α qui s'écrivent $f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. On a vu que

$$\varphi^*(f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = (f \circ \varphi) d\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_k},$$

où les φ^i sont les composantes de φ. On a donc

$$\begin{array}{rcl} d(\varphi^*\alpha) & = & d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_k}, \\ & = & (\varphi^* df) \wedge \varphi^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ & = & \varphi^*(d\alpha) \qquad \square \end{array}$$

On a donc montré que l'image réciproque d'une forme fermée (resp. exacte) est une forme fermée (resp. exacte).

Le lemme de Poincaré.

Définition 14

Un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ est contenu dans U.

Le lemme de Poincaré.

Définition 14

Un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ est contenu dans U.

On peut maintenant formuler le Lemme de Poincaré.

Théorème 15 (Lemme de Poincaré)

Si $U \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert étoilé, toute forme fermée sur U est exacte.

Le lemme de Poincaré.

Définition 14

Un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ est contenu dans U.

On peut maintenant formuler le Lemme de Poincaré.

Théorème 15 (Lemme de Poincaré)

Si $U \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert étoilé, toute forme fermée sur U est exacte.

Preuve : Pour alléger les notations on suppose que U est étoilé par rapport à l'origine. On ne montrera ce résultat que pour les 1-formes.

Le lemme de Poincaré.

Définition 14

Un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ est contenu dans U.

On peut maintenant formuler le Lemme de Poincaré.

Théorème 15 (Lemme de Poincaré)

Si $U \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert étoilé, toute forme fermée sur U est exacte.

Preuve : Pour alléger les notations on suppose que U est étoilé par rapport à l'origine. On ne montrera ce résultat que pour les 1-formes.
Soit $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ vérifiant $d\alpha = 0$. Soit f la fonction définie sur U par

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x^i \int_0^1 \alpha_i(tx)dt.$$

Le lemme de Poincaré.

Définition 14

Un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$ est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ est contenu dans U.

On peut maintenant formuler le Lemme de Poincaré.

Théorème 15 (Lemme de Poincaré)

Si $U \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert étoilé, toute forme fermée sur U est exacte.

Preuve : Pour alléger les notations on suppose que U est étoilé par rapport à l'origine. On ne montrera ce résultat que pour les 1-formes.
Soit $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ vérifiant $d\alpha = 0$. Soit f la fonction définie sur U par

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^i \int_0^1 \alpha_i(tx)dt.$$

Remarquons que ceci a un sens car pour tout $x \in U$ le segment $[0, x] \subset U$.

Calculons sa différentielle

$$df(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \alpha_i(tx)dt \right) dx^i + \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt \right) dx^j \tag{1}$$

Calculons sa différentielle

$$\begin{aligned}
df(x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_i(tx)dt\right)dx^i + \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt\right)dx^j && (1)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t\, x^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt\right)dx^j && (2)
\end{aligned}$$

Calculons sa différentielle

$$
\begin{aligned}
df(x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_i(tx)dt\right) dx^i + \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt\right) dx^j && (1)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t\,x^i\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt\right) dx^j && (2)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t\,x^i\frac{\partial\alpha_j}{\partial x^i}(tx)dt\right) dx^j && (3)
\end{aligned}
$$

Le passage de la ligne 2) à la ligne 3) se fait en utilisant $d\alpha = 0$

Calculons sa différentielle

$$
\begin{aligned}
df(x) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \alpha_i(tx)dt \right) dx^i + \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt \right) dx^j & (1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t\, x^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt \right) dx^j & (2) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t\, x^i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}(tx)dt \right) dx^j & (3) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \int_0^1 t\, \frac{d}{dt} \alpha_j(tx)dt \right) dx^j & (4)
\end{aligned}
$$

Le passage de la ligne 2) à la ligne 3) se fait en utilisant $d\alpha = 0$

Calculons sa différentielle

$$
\begin{aligned}
df(x) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_i(tx)dt\right)dx^i + \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt\right)dx^j && (1)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t\,x^i\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt\right)dx^j && (2)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t\,x^i\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}(tx)dt\right)dx^j && (3)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \int_0^1 t\,\frac{d}{dt}\alpha_j(tx)dt\right)dx^j && (4)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\alpha_j dx^j = \alpha && (5)
\end{aligned}
$$

Le passage de la ligne 2) à la ligne 3) se fait en utilisant $d\alpha = 0$

Calculons sa différentielle

$$\begin{aligned}
df(x) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \alpha_i(tx)dt \right) dx^i + \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt \right) dx^j && (1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t\, x^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt \right) dx^j && (2) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t\, x^i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}(tx)dt \right) dx^j && (3) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \int_0^1 t\, \frac{d}{dt} \alpha_j(tx)dt \right) dx^j && (4) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j dx^j = \alpha && (5)
\end{aligned}$$

Le passage de la ligne 2) à la ligne 3) se fait en utilisant $d\alpha = 0$ celui de la ligne 4) à la ligne 5) en intégrant par parties.

Pour une forme de degré quelconque, on peut aussi produire une primitive par intégration. Si $\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$, on définit une k forme $I(\alpha)$ par

$$I(\alpha) = \sum_{i_1 < \cdots < i_{k+1}} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^k \alpha_{i_1, \ldots, i_{k+1}}(tx) dt \right) x^{i_j} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k+1}}$$

ou

$$I(\alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) = \int_0^1 t^k \alpha_{t\,x}(x, v_1, \ldots, v_k)\, dt$$

On peut montrer que pour toute forme différentielle α, on a $d(I(\alpha)) + I(d\alpha) = \alpha$. Lorsque $d\alpha = 0$ on a le résultat voulu ($I(0) = 0$). On pourra consulter le livre de M. Spivak : *Calculus on manifolds* p.94 pour la preuve et le livre de J. Lafontaine *introduction aux variétés différentielles* pour une explication de comment on en arrive à une telle formule. □

Pour une forme de degré quelconque, on peut aussi produire une primitive par intégration. Si $\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$, on définit une k forme $I(\alpha)$ par

$$I(\alpha) = \sum_{i_1 < \cdots < i_{k+1}} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^k \alpha_{i_1,\ldots,i_{k+1}}(tx) dt \right) x^{i_j} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k+1}}$$

ou

$$I(\alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) = \int_0^1 t^k \alpha_{t\,x}(x, v_1, \ldots, v_k)\, dt$$

On peut montrer que pour toute forme différentielle α, on a $d(I(\alpha)) + I(d\alpha) = \alpha$. Lorsque $d\alpha = 0$ on a le résultat voulu ($I(0) = 0$). On pourra consulter le livre de M. Spivak : *Calculus on manifolds* p.94 pour la preuve et le livre de J. Lafontaine *introduction aux variétés différentielles* pour une explication de comment on en arrive à une telle formule. □

Corollaire 16

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $\alpha \in \Omega^k(U)$. Si U est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$ et si $d\alpha = 0$ alors α est exacte.

Preuve : Soit $f : \mathbf{R}^n \to U$ un difféomorphisme. La proposition 13 nous dit que $f^*\alpha$ est fermée. D'après le lemme de Poincaré, il existe $\beta \in \Omega^{k-1}$ telle que $d\beta = f^*\alpha$. En utilisant 9 et à nouveau 13 et , on a

$$d(f^{-1*}\beta) = f^{-1*}d\beta = f^{-1*}f^*\alpha = \alpha.$$

Ce qui montre que α est exacte.$\square$
Si on peut montrer qu'il existe une 1-forme fermée non-exacte sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, on a donc

Corollaire 17

$\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ n'est pas difféomorphe à $\mathbf{R}^2$.

1-formes fermées et intégrales.

Définition 18

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $\alpha \in \Omega^1(U)$, $\gamma : [a,b] \to U$ continue et $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b$ tels que la restriction de γ à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est de classe C^1 (on dit alors que γ est de classe C^1 par morceaux). On définit alors l'intégrale de α le long de γ comme

$$\int_\gamma \alpha := \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_i^* \alpha = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{(\gamma(t))}.\gamma_i'(t)dt,$$

où γ_i désigne la restriction de γ à $[t_i, t_i + 1]$.

Il est facile de vérifier que si on effectue un changement de paramétrage *croissant* (C^1) sur γ l'intégrale ne change pas mais qu'elle est transformée en son opposé si celui-ci est décroissant. En effet

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{(\gamma(t))}.\gamma'(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(t_i)}^{\varphi^{-1}(t_{i+1})} \alpha_{(\gamma\circ\varphi(t))}.\gamma'(\varphi(t))\ \varphi'(t)dt.$$

Si α est exacte, c'est-à-dire s'il existe $f : U \to \mathbf{R}$ lisse telle que $df = \alpha$ alors cette intégrale ne dépend que des extrémités de γ :

$$\int_\gamma df = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Si α est exacte, c'est-à-dire s'il existe $f : U \to \mathbf{R}$ lisse telle que $df = \alpha$ alors cette intégrale ne dépend que des extrémités de γ :

$$\int_\gamma df = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier si $\gamma(a) = \gamma(b)$ alors

$$\int_\gamma df = 0.$$

Si α est exacte, c'est-à-dire s'il existe $f : U \to \mathbf{R}$ lisse telle que $df = \alpha$ alors cette intégrale ne dépend que des extrémités de γ :

$$\int_\gamma df = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier si $\gamma(a) = \gamma(b)$ alors

$$\int_\gamma df = 0.$$

On a donc un moyen de tester si une forme est exacte.

Si α est exacte, c'est-à-dire s'il existe $f : U \to \mathbf{R}$ lisse telle que $df = \alpha$ alors cette intégrale ne dépend que des extrémités de γ :

$$\int_\gamma df = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier si $\gamma(a) = \gamma(b)$ alors

$$\int_\gamma df = 0.$$

On a donc un moyen de tester si une forme est exacte. Essayons le.
Soit $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$. Prenons $\gamma : [0, 2\pi] \to U$ défini par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. On a

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^{2\pi} (\cos t)(\cos t) - (\sin t)(-\sin t)dt = 2\pi \neq 0$$

Ainsi α n'est pas fermée, ce qui prouve 17.
Il existe une réciproque. . .

Proposition 19

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ connexe par arcs et $\alpha \in \Omega^1(U)$. La forme α est exacte si et seulement si pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux $\int_\gamma \alpha = 0$

Proposition 19

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ connexe par arcs et $\alpha \in \Omega^1(U)$. La forme α est exacte si et seulement si pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux $\int_\gamma \alpha = 0$

Preuve : En TD !

Proposition 19

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ connexe par arcs et $\alpha \in \Omega^1(U)$. La forme α est exacte si et seulement si pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux $\int_\gamma \alpha = 0$

Preuve : En TD !

Cette récriproque semble impossible à mettre en oeuvre, on ne peut pas intégrer sur tous les lacets de U.

Proposition 19

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ connexe par arcs et $\alpha \in \Omega^1(U)$. La forme α est exacte si et seulement si pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux $\int_\gamma \alpha = 0$

Preuve : En TD !

Cette récriproque semble impossible à mettre en oeuvre, on ne peut pas intégrer sur tous les lacets de U. En fait, il suffit d'en choisir correctement un certain nombre... Par exemple :

Proposition 20

Soit $C : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ donné par $C(t) = (\cos t, \sin t)$. Si $\alpha \in \Omega^1(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ vérifie $d\alpha = 0$ et $\int_C \alpha = 0$, alors α est exacte.

Preuve :

Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbf{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x = 0$ et $y \geq 0$ (resp. $x = 0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^\pm : U^\pm \to \mathbf{R}$ telles que $df^\pm = \alpha_{|_{U^\pm}}$.

Preuve :

Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbf{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x = 0$ et $y \geq 0$ (resp. $x = 0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^\pm : U^\pm \to \mathbf{R}$ telles que $df^\pm = \alpha_{|_{U^\pm}}$.

Sur un ouvert connexe deux primitives d'une 1-forme diffèrent d'une constante

Preuve :

Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbf{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x = 0$ et $y \geq 0$ (resp. $x = 0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^\pm : U^\pm \to \mathbf{R}$ telles que $df^\pm = \alpha_{|_{U^\pm}}$.

$\boxed{\text{Sur un ouvert connexe deux primitives d'une 1-forme diffèrent d'une constante}}$

$U^+ \cap U^- = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|x \neq 0\}$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $H_+ = \{(x, y)\,|x > 0\}$ et $H_- = \{(x, y)\,|x < 0\}$.

Preuve :

Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbf{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x = 0$ et $y \geq 0$ (resp. $x = 0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^\pm : U^\pm \to \mathbf{R}$ telles que $df^\pm = \alpha_{|_{U^\pm}}$.

Sur un ouvert connexe deux primitives d'une 1-forme diffèrent d'une constante

$U^+ \cap U^- = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|x \neq 0\}$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $H_+ = \{(x, y)\,|x > 0\}$ et $H_- = \{(x, y)\,|x < 0\}$.
Ainsi il existe c_+ et $c_- \in \mathbf{R}$ tels que $(f^+ - f_-)|_{H_+} = c_+$ (resp $(f^+ - f_-)|_{H_-} = c_-$.

Preuve :

Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbf{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x = 0$ et $y \geq 0$ (resp. $x = 0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^\pm : U^\pm \to \mathbf{R}$ telles que $df^\pm = \alpha_{|_{U^\pm}}$.

$\boxed{\text{Sur un ouvert connexe deux primitives d'une 1-forme diffèrent d'une constante}}$

$U^+ \cap U^- = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|x \neq 0\}$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $H_+ = \{(x,y)\,|x > 0\}$ et $H_- = \{(x,y)\,|x < 0\}$.
Ainsi il existe c_+ et $c_- \in \mathbf{R}$ tels que $(f^+ - f_-)|_{H_+} = c_+$ (resp $(f^+ - f_-)|_{H_-} = c_-$.
Quitte à remplacer f^- par $f^- + c_-$ on peut supposer $c_- = 0$.

Preuve :

Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbf{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x = 0$ et $y \geq 0$ (resp. $x = 0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^\pm : U^\pm \to \mathbf{R}$ telles que $df^\pm = \alpha_{|_{U^\pm}}$.

$\boxed{\text{Sur un ouvert connexe deux primitives d'une 1-forme diffèrent d'une constante}}$

$U^+ \cap U^- = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|x \neq 0\}$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $H_+ = \{(x, y) \,|x > 0\}$ et $H_- = \{(x, y) \,|x < 0\}$.
Ainsi il existe c_+ et $c_- \in \mathbf{R}$ tels que $(f^+ - f_-)|_{H_+} = c_+$ (resp $(f^+ - f_-)|_{H_-} = c_-$.
Quitte à remplacer f^- par $f^- + c_-$ on peut supposer $c_- = 0$.

La restriction de C à $[0, \pi]$ (resp. $[\pi, 2\pi]$) arrive dans U_- (resp. U^+). Ainsi

$$0 = \int_C \alpha \;\; = \;\; \int_0^\pi \alpha(C(t))C'(t)dt + \int_\pi^{2\pi} \alpha(C(t))C'(t)dt$$

Preuve :

Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbf{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x=0$ et $y \geq 0$ (resp. $x=0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^\pm : U^\pm \to \mathbf{R}$ telles que $df^\pm = \alpha_{|_{U^\pm}}$.

$\boxed{\text{Sur un ouvert connexe deux primitives d'une 1-forme diffèrent d'une constante}}$

$U^+ \cap U^- = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|x \neq 0\}$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $H_+ = \{(x,y)\,|x>0\}$ et $H_- = \{(x,y)\,|x<0\}$.
Ainsi il existe c_+ et $c_- \in \mathbf{R}$ tels que $(f^+ - f_-)|_{H_+} = c_+$ (resp $(f^+ - f_-)|_{H_-} = c_-$.
Quitte à remplacer f^- par $f^- + c_-$ on peut supposer $c_- = 0$.

La restriction de C à $[0,\pi]$ (resp. $[\pi, 2\pi]$) arrive dans U_- (resp. U^+). Ainsi

$$\begin{aligned} 0 = \int_C \alpha &= \int_0^\pi \alpha(C(t))C'(t)dt + \int_\pi^{2\pi} \alpha(C(t))C'(t)dt \\ &= [f^-(C(t))]_0^\pi + [f^+(C(t))]_\pi^{2\pi} \end{aligned}$$

Preuve :

Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbf{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x = 0$ et $y \geq 0$ (resp. $x = 0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^\pm : U^\pm \to \mathbf{R}$ telles que $df^\pm = \alpha_{|_{U^\pm}}$.

$\boxed{\text{Sur un ouvert connexe deux primitives d'une 1-forme diffèrent d'une constante}}$

$U^+ \cap U^- = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|x \neq 0\}$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $H_+ = \{(x, y) \,|x > 0\}$ et $H_- = \{(x, y) \,|x < 0\}$.
Ainsi il existe c_+ et $c_- \in \mathbf{R}$ tels que $(f^+ - f_-)|_{H_+} = c_+$ (resp $(f^+ - f_-)|_{H_-} = c_-$.
Quitte à remplacer f^- par $f^- + c_-$ on peut supposer $c_- = 0$.

La restriction de C à $[0, \pi]$ (resp. $[\pi, 2\pi]$) arrive dans U_- (resp. U^+). Ainsi

$$
\begin{aligned}
0 = \int_C \alpha &= \int_0^\pi \alpha(C(t))C'(t)dt + \int_\pi^{2\pi} \alpha(C(t))C'(t)dt \\
&= [f^-(C(t))]_0^\pi + [f^+(C(t))]_\pi^{2\pi} \\
&= f^-(-1, 0) - f^-(1, 0) + f^+(1, 0) - f^+(-1, 0) =
\end{aligned}
$$

Preuve :

Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbf{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x = 0$ et $y \geq 0$ (resp. $x = 0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^\pm : U^\pm \to \mathbf{R}$ telles que $df^\pm = \alpha_{|_{U^\pm}}$.

$\boxed{\text{Sur un ouvert connexe deux primitives d'une 1-forme diffèrent d'une constante}}$

$U^+ \cap U^- = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,|x \neq 0\}$ n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $H_+ = \{(x, y) \,|x > 0\}$ et $H_- = \{(x, y) \,|x < 0\}$.
Ainsi il existe c_+ et $c_- \in \mathbf{R}$ tels que $(f^+ - f_-)|_{H_+} = c_+$ (resp $(f^+ - f_-)|_{H_-} = c_-$.
Quitte à remplacer f^- par $f^- + c_-$ on peut supposer $c_- = 0$.

La restriction de C à $[0, \pi]$ (resp. $[\pi, 2\pi]$) arrive dans U_- (resp. U^+). Ainsi

$$
\begin{aligned}
0 = \int_C \alpha &= \int_0^\pi \alpha(C(t))C'(t)dt + \int_\pi^{2\pi} \alpha(C(t))C'(t)dt \\
&= [f^-(C(t))]_0^\pi + [f^+(C(t))]_\pi^{2\pi} \\
&= f^-(-1,0) - f^-(1,0) + f^+(1,0) - f^+(-1,0) = c_+ \square
\end{aligned}
$$

Intégration sur les cubes singuliers

On notera I l'intervalle $[0,1]$ et donc I^k de cube $[0,1]^k \subset \mathbf{R}^k$.

Définition 21

Un cube singulier de dimension k de $\mathbf{R}^n$ est une application lisse [a] c de I^k dans $\mathbf{R}^n$.

a. c est en fait la restriction à I^k d'une fonction lisse définie sur un voisiage de I^k

Intégration sur les cubes singuliers

On notera I l'intervalle $[0,1]$ et donc I^k de cube $[0,1]^k \subset \mathbf{R}^k$.

Définition 21

Un cube singulier de dimension k de $\mathbf{R}^n$ est une application lisse [a] c de I^k dans $\mathbf{R}^n$.

a. c est en fait la restriction à I^k d'une fonction lisse définie sur un voisiage de I^k

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^k$ contenant I^k et $\omega \in \Omega^k(\mathbf{R}^k)$. Il existe une fonction f telle que $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$.On pose alors

$$\int_{I^k} \omega = \int_{I^k} f(x) dx^1 \dots dx^k.$$

Intégration sur les cubes singuliers

On notera I l'intervalle $[0,1]$ et donc I^k de cube $[0,1]^k \subset \mathbf{R}^k$.

Définition 21

Un cube singulier de dimension k de $\mathbf{R}^n$ est une application lisse [a] c de I^k dans $\mathbf{R}^n$.

a. c est en fait la restriction à I^k d'une fonction lisse définie sur un voisiage de I^k

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^k$ contenant I^k et $\omega \in \Omega^k(\mathbf{R}^k)$. Il existe une fonction f telle que $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$.On pose alors

$$\int_{I^k} \omega = \int_{I^k} f(x) dx^1 \dots dx^k.$$

Soit c est un cube singulier de dimension k et soit U est un ouvert de E contenant $c(I^k)$.

Intégration sur les cubes singuliers

On notera I l'intervalle $[0,1]$ et donc I^k de cube $[0,1]^k \subset \mathbf{R}^k$.

Définition 21

Un cube singulier de dimension k de $\mathbf{R}^n$ est une application lisse [a] c de I^k dans $\mathbf{R}^n$.

a. c est en fait la restriction à I^k d'une fonction lisse définie sur un voisiage de I^k

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^k$ contenant I^k et $\omega \in \Omega^k(\mathbf{R}^k)$. Il existe une fonction f telle que $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$.On pose alors

$$\int_{I^k} \omega = \int_{I^k} f(x) dx^1 \dots dx^k.$$

Soit c est un cube singulier de dimension k et soit U est un ouvert de E contenant $c(I^k)$. On définit l'intégrale de $\omega \in \Omega^k(U)$ sur c par

$$\int_c \omega = \int_{I^k} c^* \omega.$$

Intégration sur les cubes singuliers

On notera I l'intervalle $[0,1]$ et donc I^k de cube $[0,1]^k \subset \mathbf{R}^k$.

Définition 21

Un cube singulier de dimension k de $\mathbf{R}^n$ est une application lisse [a] c de I^k dans $\mathbf{R}^n$.

a. c est en fait la restriction à I^k d'une fonction lisse définie sur un voisiage de I^k

Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^k$ contenant I^k et $\omega \in \Omega^k(\mathbf{R}^k)$. Il existe une fonction f telle que $\omega = f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$.On pose alors

$$\int_{I^k} \omega = \int_{I^k} f(x)dx^1 \dots dx^k.$$

Soit c est un cube singulier de dimension k et soit U est un ouvert de E contenant $c(I^k)$. On définit l'intégrale de $\omega \in \Omega^k(U)$ sur c par

$$\int_c \omega = \int_{I^k} c^* \omega.$$

Si $k = 0$ on a $c : \{0\} \to E$, ω est une fonction et on pose $\int_c \omega = \omega(c(0))$.

Définition 22

Une chaine singulière C est une liste de cubes singuliers $\{c_1, \dots, c_d\}$ de même dimension chacun ayant un poids $a_i \in \mathbf{R}$. Au lieu d'écrire $C = \{(c_i, a_i), i = 1, \dots, d\}$, on écrit une somme *formelle* $C = \sum_{i=1}^{d} a_i c_i$.

Définition 22

Une chaine singulière C est une liste de cubes singuliers $\{c_1, \ldots, c_d\}$ de même dimension chacun ayant un poids $a_i \in \mathbf{R}$. Au lieu d'écrire $C = \{(c_i, a_i), i = 1, \ldots, d\}$, on écrit une somme *formelle* $C = \sum_{i=1}^d a_i c_i$.

L'integrale de ω sur $C = \sum_{i=1}^d a_i c_i$ est définie par

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^{d} a_i \int_{c_i} \omega = \sum_{i=1}^{d} a_i \int_{I^k} c_i^* \omega.$$

Définition 22

Une chaine singulière C est une liste de cubes singuliers $\{c_1, \dots, c_d\}$ de même dimension chacun ayant un poids $a_i \in \mathbf{R}$. Au lieu d'écrire $C = \{(c_i, a_i), i = 1, \dots, d\}$, on écrit une somme *formelle* $C = \sum_{i=1}^d a_i c_i$.

L'integrale de ω sur $C = \sum_{i=1}^d a_i c_i$ est définie par

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^d a_i \int_{c_i} \omega = \sum_{i=1}^d a_i \int_{I^k} c_i^* \omega.$$

Le cube I^k a $2k$ faces qui sont isomorphes à des cubes I^{k-1} (il y a 2 points aux extrémités d'un segment, un carré a 4 côtés, un cube 6 faces). Ces faces sont les images des $2k$ cubes singuliers suivants :

$$\begin{array}{cccc} I^k_{(i,0)} : & I^{k-1} & \to & I^k \\ & (x^1, \dots, x^{k-1}) & \mapsto & (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^{k-1}) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} I^k_{(i,1)} : & I^{k-1} & \to & I^k \\ & (x^1, \dots, x^{k-1}) & \mapsto & (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^{k-1}) \end{array}$$

où $1 \leq i \leq k$. On attribue au cube singulier $I^k_{(i,\alpha)}$ le poids $(-1)^{i+\alpha}$.

Lorsque $k = 3$, la raison d'un tel choix est donnée par l'exercice suivant (une explication similaire existe pour tout k).

Exercice 2

Montrer le poids associé à $I^3_{(i,\alpha)}$ est égal à 1 si et seulement si l'application de Gauss de $I^3_{(i,\alpha)}$ est sortante.

Définition 23

Le bord du cube I^k est la chaine singulière

$$\partial I^k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} I^k_{(i,\alpha)}.$$

Le bord d'un cube singulier $c : I^k \to E$ est la chaine

$$\partial c = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} (c \circ I^k_{(i,\alpha)}).$$

Le bord d'une chaine singuliere $C = \sum a_i c_i$ est la chaine singulière

$$\partial C = \sum a_i \partial(c_i).$$

On a maintenant tous les éléments pour enoncer le théorème de Stockes !

Théorème 24

Si $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ et C est une k-chaine de U alors

$$\int_C d\omega = \int_{\partial(C)} \omega.$$

Lorsque $k = 1$ et $C = c$ un cube singulier de dimension 1 (ie un arc paramétré lisse) ce théorème dit que $\int_c df = f(c(1)) - f(c(0))$. On retrouve la formule vue précédemment et le "théorème fondamental de l'analyse".

Preuve

On commence par considérer le cas où $C = I^k$ et $\omega = f\ dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k$ pour un certain i.
On remarque que ${I^k_{(j,\alpha)}}^*\omega = 0$ si $i \neq j$ et que ${I^k_{(j,\alpha)}}^*\omega = f(x^1, \dots, \alpha, \dots x^{k-1})dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{k-1}$ si $i = j$. Par aileurs, comme le segment $[0, 1]$ est de longueur 1,

$$\int_{I^{k-1}} f(x^1, \dots, \alpha, \dots x^{k-1})dx^1 \dots dx^{k-1} = \int_{I^k} f(x^1, \dots, \alpha, \dots x^k)dx^1 \dots dx^k$$

Ainsi

$$\int_{\partial I^k} \omega = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{\alpha+j} \int_{I^{k-1}} {I^k_{(j,\alpha)}}^*\omega = \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{I^k} f(x^1, \dots, \alpha, \dots x^k)\ dx^1 \dots d$$

Comme $d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$, on a

$$\int_{I^k} d\omega = (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^k.$$

Comme

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = f(x^1, \dots, 1, \dots x^k) - f(x^1, \dots, 0, \dots x^k),$$

en appliquant le théorème de Fubini (en intègrant tout d'abord par rapport à x^i) on obtient

$$\int_{I^k} d\omega = \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i-\alpha} \int_{I^k} f(x^1, \dots, \alpha, \dots x^k)\ dx^1 \dots dx^k = \int_{\partial I^k} \omega.$$

Le cas où ω est une $(k-1)$ forme quelconque s'en déduit facilement. On suppose maintenant que C est un cube singulier c de dimension k de E. On déduit facilement de la définition de l'intégrale d'une forme sur une chaine singulière que

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega.$$

On a donc

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Ce qui montre le théorème de Stockes pour les cubes.

On en déduit le cas où C est une k-chaine $\sum a_i c_i$:

$$\int_C d\omega = \sum_i a_i \int_{c_i} d\omega = \sum_i a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial C} \omega. \quad \square$$

On en déduit le cas où C est une k-chaine $\sum a_i c_i$:

$$\int_C d\omega = \sum_i a_i \int_{c_i} d\omega = \sum_i a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial C} \omega. \quad \square$$

Exercice 3

Soit $c : I^2 \to \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ le cube singulier défini par

$$c(u,v) = (\cos(2\pi u)\sin(2\pi v), \sin(2\pi u)\cos(2\pi v), \sin(2\pi v)).$$

1. Montrer que $\int_{\partial c} \alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Omega^1(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$.
2. Soit $\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy)$.

   Montrer que ω est fermée et calculer $\displaystyle\int_c \omega$.

   En déduire que β n'est pas exacte et $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ n'est pas difféomorphe à $\mathbf{R}^3$.