# Chapitre 3

# Étude métrique des surfaces de $\mathbb{R}^3$

On s'interesse maintenant à la géométrie des surfaces (i.e. des sous-variétés de dimension 2) de l'espace $\mathbb{R}^3$. Comme on travaillera surtout localement, on supposera presque toujours qu'il existe un système de coordonnées global autrement dit que la surface est une nappe plongée.

## 3.1 Première forme fondamentale d'une surface.

Dans tout ce qui suit $\Sigma$ désigne une surface de $\mathbb{R}^3$.

**Définition 3.1.1.** *On appelle* première forme fondamentale *de $\Sigma$ en $p$, on note $I_p$, la restriction du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ à $T_p\Sigma$. Autrement dit si $(X, Y) \in T_p\Sigma$, par définition*

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle .$$

On a ainsi un produit scalaire sur chaque $T_p\Sigma$ ou si on veut un « champ » de produits scalaires.

Si $X$ est donné, il est facile de calculer $I_p(X, X)$. Mais pour exprimer plus globalement $I_p$, on a besoin d'une base de $T_p\Sigma$. Il n'y en a pas de canonique. Cependant, si on choisit des coordonnées $(U, f)$, pour tout $x \in U$ les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ forment une base de $T_{f(x)}\Sigma$. On note $\alpha_f(x)$ la matrice de $I_p(f(x))$ dans cette base. On a

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\rangle \end{pmatrix} = {}^t(Jf(x))(Jf(x)) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

où $Jf(x)$ désigne la jacobienne de $f$ en $x$ et ${}^t$ la transposition.
On a donc $I_f(x)(Df(x).(\xi_1, \xi_2), Df(x)(\zeta_1, \zeta_2)) = I_{f(x)}(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}) = {}^t\xi \alpha_f(x) \zeta$, où $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$ et $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$.

**Définition 3.1.2.** *L'application lisse de $U$ dans l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre 2 ainsi définie est appelée l'expression de la première forme fondamentale dans les coordonnées $(U, f)$.*

Cette application dépend fortement du système de coordonnées choisi, mais on sait dire ce qu'elle devient quand on change de coordonnées. Il suffit d'appliquer en chaque point la formule de changement de base des formes bilinéaire.

**Proposition 3.1.3.** *Si $(U, f)$ et $(V, g)$ sont deux systèmes de coordonnées sur $\Sigma$ et si $\psi$ est un changement de coordonnées tel que $g = f \circ \psi$, alors*

$$\alpha_g(x) = {}^t(J\psi(x))\alpha_f(\psi(x))(J\psi(x)),$$

*où $J\psi$ désigne la jacobienne de $\psi$.*

**Preuve :** Par définition on a $\alpha_g(x) = {}^t(Jg(x))(Jg(x))$. La formule de composition des dérivations nous dit que $Jg(x) = Jf(\psi(x))J\psi(x)$, d'où

$$\begin{aligned}\alpha_g(x) &= {}^t(Jf(\psi(x))J\psi(x))(Jf(\psi(x))J\psi(x)) \\ &= {}^t(J\psi(x))^t(Jf(\psi(x))(Jf(\psi(x)))(J\psi(x))) \\ &= {}^t(J\psi(x))\alpha_f(J\psi(x)).\end{aligned} \qquad \square$$

**Exemples 3.1.4.** 1) On considère la nappe paramétrée $(U, f)$ où $U = \mathbf{D}_2$ et $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$. On a

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \end{pmatrix}.$$

Comme $\alpha_f = {}^tJf(x)Jf(x)$, on a

$$\alpha_f = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x_1^2}{1-x_1^2-x_2^2} & \frac{x_1x_2}{1-x_1^2-x_2^2} \\ \frac{x_1x_2}{1-x_1^2-x_2^2} & 1 + \frac{x_2^2}{1-x_1^2-x_2^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - x_1^2 - x_2^2} \begin{pmatrix} 1 - x_2^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & 1 - x_1^2 \end{pmatrix}.$$

2) On prend maintenant la nappe paramétrée $(V, g)$ où $V = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $g(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ (les deux nappes ne sont pas équivalentes, car $f(U) \neq g(V)$, mais on peut les rendre équivalentes en restreignant $U$ et $V$). Cette fois

$$Jg(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \alpha_g = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons que $\Sigma$ soit une nappe plongée paramétrée par $(U, f)$. L'expression $\alpha_f$ contient suffisamment d'information sur la géométrie de $\Sigma$ pour qu'on puisse (parfois) travailler uniquement sur $U \subset \mathbb{R}^2$ sans repasser par $\mathbb{R}^3$. Par exemple, si $\gamma : [0, 1] \to \gamma$ est un arc $C^1$. Sa longueur est donnée par

$$L(\gamma) = \int_0^1 \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} \, dt.$$

On a vu au chapitre précédent qu'il existe $\beta : [0, 1] \to U$ de classe $C^1$ tel que $\gamma = f \circ \beta$. On a $\gamma'(t) = Df(\beta(t))\beta'(t)$ et donc

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \langle Df(\beta(t))\beta'(t), Df(\beta(t))\beta'(t) \rangle^{1/2} \, dt \\ &= \int_0^1 \left({}^t\beta'(t).\alpha_f(\beta(t)).\beta'(t)\right)^{1/2} dt \end{aligned}$$

Cela signifie que pour déduire la longueur d'une route $(\gamma)$ de son tracé sur une carte $(\beta)$, il faut connaitre la première forme fondamentale associée. En général, le plus court chemin ne se lit pas comme une ligne droite sur la carte, cf. exemple 3.1.5.

Même chose pour les angles. L'angle (ou du moins sa mesure) entre deux vecteurs non nuls $X$ et $Y$ de $\mathbb{R}^3$ est $\arccos\left\langle \frac{1}{\|X\|}X, \frac{1}{\|Y\|}Y\right\rangle$. Si ces deux vecteurs apprtiennent à $T_p\Sigma$, il existe $V$ et $W$ non nuls dans $\mathbb{R}^2$ tels $Df(x).V = X$ et $Df(x).W = Y$. Ainsi, l'angle entre $X$ et $Y$ est égal à

$$\arccos\left(\frac{{}^tV}{({}^tV\alpha_f(p)V)^{1/2}}\alpha_f(p)\frac{W}{({}^tW\alpha_f(p)W)^{1/2}}\right).$$

**Exemple 3.1.5.** Imaginons le Loup et le Petit Chaperon Rouge allant de Mineapolis à Ulan Bator. Admettons que ces villes sont situées sur le 45eme parallele et qu'il y a une différence de longitude de 180 degré. On donne au loup une carte réalisée avec les coordonnées $(V, g)$ et à la fillette une réalisée à partir de $(V, g)$ vue à l'exemple 3.1.4. Chacun veut arriver le premier. Chacun part donc en ligne droite... sur sa carte.

Dans les coordonnées $(V, g)$ les villes ont pour coordonnées $(0, \pi/4)$ et $(\pi, \pi/4)$, le loup va donc suivre le 45eme parallèle ie le chemin dont l'expression en coordonnées $(V, g)$ est $t \mapsto (t, \pi/4)$. Il parcourt donc une longueur égale à $\int_0^\pi \cos(\pi/4)dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ (l'unité étant le rayon terrestre).

Dans les coordonnées $(U, f)$ par contre les coordonnées de ces villes sont $(0, -\sqrt{2}/2)$ et $(0, \sqrt{2}/2)$. Le chemin qui semble naturel a pour expression dans les coordonnées $(U, f)$ $t \mapsto (0, t)$ (il passe par le pole nord). Sa longueur est donnée par $\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{2}$. C'est beaucoup plus court !

**Remarque 3.1.6.** On voit que deux nappes paramétrées $(U, f)$ et $(V, g)$ telles que $\alpha_f = \alpha_g$ paraissent identiques à leurs habitants tant qu'ils n'ont pas conscience de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui les entoure et ce même si $f(U)$ et $f(V)$ n'ont rien à voir. Tout ce qu'ils peuvent mesurer localement sans quitter la surface sera identique. C'est un peu comme si on avait deux cartes geographiques identiques correspondant à deux parties distinctes du globe.

Cas particulier important si $\phi$ est une isométrie $\alpha_f = \alpha_{\phi\circ f}$. Dans ce cas, les nappes sont en un certain sens les mêmes. Par contre, on trouve facilement (exercice) un paramétrage local $(U, f)$ du cylindre droit tel que $\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les habitants du cylindre (qui ne se deplacent pas trop) ont donc l'impression de vivre dans un plan.

Si on se donne des coordonnées $(U, f)$. Les longueurs que l'on « voit » sur $U$ sont les vraies longueurs (ie celles sur $\Sigma$) à un facteur près si et seulement s'il existe $C > 0$ (l'inverse de l'echelle) telle que $\alpha_f = C^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Sur toutes les mappemondes les longueurs lues sont fausses.*

Pour ce qui est des angles, on montre facilement que deux produits scalaires définissent les mêmes angles (par la formule vue plus haut) si et seulement s'ils sont proportionnels. On en déduit que que les angles lus (par exemple avec un rapporteur) sur une carte sont les angles réels s'il existe une fonction $\ell$ à valeurs positives telle que $\alpha_f(p) = \ell(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sur beaucoup de mappemondes cette condition est vérifiée (pour des raisons esthétiques et pratiques).

**Exercice 1. Projections de Mercator.** Soit $(V, g)$ les coordonnées (géographiques) vue dans l'exemple 3.1.4. Montrer qu'il existe un changement de coordonnées $\psi$ de la forme $(x, y) \mapsto (x, h(y))$ tel que $\alpha_{g\circ\psi}(x) = \ell(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $\ell$ est une fonction positive.

## 3.2 Application de Gauss.

On dit que les Grecs avaient déduit le fait que la terre est ronde de l'observation des mâts des bateaux arrivant à l'horizon. Nous voulons faire la même chose. On commence par équiper $\Sigma$ de mâts.

**Définition 3.2.1.** *Une application $\nu : \Sigma \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une application de Gauss de $\Sigma$ si $\nu$ est continue et si pour tout $p \in \Sigma$, $\nu(p)$ est perpendiculaire à $T_p\Sigma$.*

On voit par exemple que l'identité est une application de Gauss de la sphère $S^2$. Remarquons que si $\nu$ est une application de Gauss alors $-\nu$ aussi. Un plan n'ayant que deux vecteurs orthogonaux de norme 1, on voit en faisant leur produit scalaire que lorsque $\Sigma$ est connexe (si c'est une nappe par exemple) il existe au plus deux applications de Gauss. Il n'en existe pas toujours, on se convainc facilement du fait qu'un ruban de Möbius ne possède d'application de Gauss. Si $\Sigma$ est une nappe, il n'y a pas de problèmes. En effet si $(U, f)$ est un paramétrage de $\Sigma$ alors l'application $\nu = N_f \circ f^{-1}$ où $N_f$ est définie par

$$N_f(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\|}$$

est une application de Gauss. On l'appelle l'application de Gauss associée à $(U, f)$. On remarque que l'application $N_f$ est lisse (du moins si $f$ l'est).

**Proposition 3.2.2.** *Soient $(U, f)$ et $(V, g)$ deux paramétrages de $\Sigma$ et $\phi : U \to V$ le changement de coordonnées associé. Ces ceux paramétrages définissent la même application de Gauss sur $\Sigma$ si et seulement si $\det(J\phi) > 0$ sur $U$.*
*On dit alors qu'ils définissent la même orientation sur $\Sigma$.*

**Preuve :** Posons $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\phi^{-1}(x)) = (a, b)$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\phi^{-1}(x)) = (c, d)$. On a

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_1}(\phi^{-1}(x)) \wedge \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_2}(\phi^{-1}(x)) = (a\frac{\partial f}{\partial x_1} + b\frac{\partial f}{\partial x_2}) \wedge (c\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge d\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)).$$

Le produit vectoriel étant bilinéaire alterné, on a donc

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_1}(\phi^{-1}(x)) \wedge \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_2}(\phi^{-1}(x)) = (ad - bc)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \det(J\phi(\phi^{-1}(x)))\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x). \square$$

*Dorénavant nous orientons $\Sigma$ c'est-à-dire nous n'autorisons que les changements de coordonnées dont le jacobien est positif.* D'après la proposition 3.2.2, tous les paramétrages d'une nappe orientée définissent la même application de Gauss. On l'appelle donc l'application de Gauss de la nappe orientée.

**Exercice 2.** Déterminer l'application de Gauss de la nappe paramétrée par $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$.

**Exercice 3.** Soient $\Sigma$ une nappe orientée paramétrée par $(U, f)$ et $\Psi$ une isométrie de $\mathbb{R}^3$ de partie linéaire $d\Psi$. On note $\Psi(\Sigma)$ la nappe orientée paramétrée par $(U, \Psi \circ f)$. Montrer que $\nu_{\Psi(\Sigma)}(\Psi \circ f(x)) = \eta d\Psi(\nu_\Sigma(f(x))$, où $\eta$ est le signe du déterminant de $d\Psi$.

## 3.3 Aire d'une surface.

On cherche à munir $\Sigma$ d'une mesure corrrespondant à notre idée intuitive d'aire (qui n'est pas si évidente à expliciter). Notamment, lorsque l'on déplace une surface son aire ne devrait pas changer. Autrement dit, si $\Psi$ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, on veut que $\Sigma$ et $\Psi(\Sigma)$ aient même mesure. On commence par remarquer qu'une surface est toujours de mesure nulle, il ne peut s'agir d'une simple restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $\Sigma$ est une nappe plongée paramétrée par $(U, f)$. Toute mesure sur $\Sigma$ se rappatrie via $f$ en une mesure sur $U$. Inversement toute mesure sur $U$ définit une mesure sur $\Sigma$, mais en général cette mesure dépend du choix de $(U, f)$.

**Proposition 3.3.1.** *Soient $(U, f)$ et $(V, g)$ deux paramétrages d'une nappe plongée $\Sigma$. Soient $\alpha_f$ et $\alpha_g$ les expressions dans ces coordonnées de la première forme fondamentale. Soit $\mu$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$. Les mesures $\sqrt{\det(\alpha_f)}\,\mu$ et $\sqrt{\det(\alpha_g)}\,\mu$ définissent la même mesure sur $\Sigma$.*

**Preuve :** On note $\Lambda_f$ (resp. $\Lambda_g$) la mesure sur $\Sigma$ définie par $\sqrt{\det(\alpha_f)}\mu$ (resp. $\sqrt{\det(\alpha_g)}\mu$). Soit $\phi : U \to V$ le difféomorphisme tel que $f = g \circ \phi$. D'après la proposition 3.1.3, $\alpha_f = {}^t J\phi \alpha_g J\phi$, donc $\det(\alpha_f) = (\det(J\phi))^2 \det(\alpha_g)$. Soit $D$ une partie mesurable de $\Sigma$.

$$\Lambda_f(D) := \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_f)} d\mu = \int_{\phi^{-1}(g^{-1}(D))} |\det(J\phi)| \sqrt{\det(\alpha_g)} d\mu.$$

La formule de changement de variable, nous dit par ailleurs que

$$\int_{\phi^{-1}(g^{-1}(D))} |\det(J\phi)| \sqrt{\det(\alpha_g)} d\mu = \int_{g^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_g)} d\mu := \Lambda_g(D). \quad \square$$

On a donc défini une mesure sur $\Sigma$ indépendamment d'un choix de coordonnées.

**Définition 3.3.2.** *Pour toute partie mesurable $D$ de $\Sigma$, on définit l'aire de $D$ comme étant $\int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_f)} d\mu$.*

On voit aussi que l'aire ainsi définie est invariante par isométrie. En effet, si $\Psi$ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, alors $\alpha_{\Psi \circ f} = \alpha_f$.

**Proposition 3.3.3.** *Si $\Psi$ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ et $D$ une partie mesurable de $\Sigma$ alors l'aire de $D$ (vu comme partie de $\Sigma$) est égale à l'aire de $\Psi(D)$ (vu comme partie de $\Psi(\Sigma)$).*

On veut comparer maintenant notre aire à l'aire usuelle. On commmence par epaissir $D$ grâce à une application de Gauss. Pour tout $t > 0$ on pose

$$V(t) := \{p + s\nu(p), p \in D \subset \Sigma, s \in [0, t]\}.$$

On remarque que cette façon d'épaissir est invariante par déplacement de la surface.Si $\Sigma$ est compacte et $D = \Sigma$ (il ne s'agit plus d'une nappe), on montre [1] que $V(t)$ est l'ensemble des points à distance $t$ de $\Sigma$ situé d'un côté de $\Sigma$.

Si $D$ et $t$ sont petits, $V(t)$ ressemble à un cylindre de base $D$ et de hauteur $t$. On devrait donc avoir $\mathrm{vol}(V(t)) \simeq \mathrm{aire}(D) \times t$. On peut voir cette affirmation comment une formulation du fait qu'on peut approximer l'aire d'une surface par la quantité de peinture nécessaire pour la peindre.

**Exemples 3.3.4.** Si $D$ est le parallélogramme de sommets $0, X, Y, X + Y$ (contenu dans la nappe $\mathrm{vect}(X, Y)$) alors $\nu = \frac{X \wedge Y}{\|X \wedge Y\|}$. On sait que $\mathrm{vol}(V(t)) = |\det(X, Y, t\nu)| = t|\det(X, Y, \nu)| = \mathrm{aire}(D).t$ et donc l'aire de $D$ est $|\det(X, Y, \nu)| = \|X \wedge Y\| = (\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}$ (vérifier qu'on retrouve l'aire usuelle ie le determinant de $(X, Y)$ par rapport à une base orthonormée de $\mathrm{vect}(X, Y)$). Si on paramètre $\mathrm{vect}(X, Y)$ par $f : (u, v) \mapsto uX + vY$, l'expression de la première forme fondamentale dans ces coordonnées est constante : $\alpha_f = \begin{pmatrix} \|X\|^2 & \langle X, Y\rangle \\ \langle X, Y\rangle & \|Y\|^2 \end{pmatrix}$. La définition 3.3.2 donne $\mathrm{aire}(D) = \int_{[0,1]^2} (\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2)^{\frac{1}{2}}\, d\mu$. C'est bien la même chose.

1. Tout point de $V(t)$ est à distance in férieure ou égale à $t$ de $\Sigma$. Réciproquement, comme $\Sigma$ est compacte pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ il existe $y \in \Sigma$ tel que $d(x, y) = \inf_{z\in\Sigma} d(x, z) = d(x, \Sigma)$. On a fini si on montre que $y - x$ est colinéaire à $\nu(y)$. La fonction $\delta_x : z \mapsto \|x - z\|^2$ est lisse, d'après le théorème des extrema liés : $\forall v \in T_y\Sigma,\ D\delta_x(y).v = \langle 2(y - x), v\rangle = 0$.

Plus $t$ est petit meilleure est l'approximation. Si l'aire qu'on a défini est bien l'aire usuelle, on devrait avoir, au moins localement pour $D$ assez petit, aire$(D) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{vol}(V(t))}{t}$.

On définit $F : U\times]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}^3$ par $F(x,s) = f(x) + sN_f(x)$. Cette application est lisse et $DF(x,0)(h,k) = Df(x).h + kN_f(x) + 0$. On voit que $DF(x,0)$ est toujours inversible, on peut appliquer le théorème d'inversion locale en tout point. Quitte à prendre un $D$ plus petit, on peut restreindre $U$ et $\varepsilon$ de telle sorte que $F$ soit un difféomorphisme lisse (on pourrait montrer que prendre $D$ compact suffit). On pose $\Delta = f^{-1}(D)$. On peut donc appliquer la formule de changement de variables :

$$\mathrm{vol}(V(t)) = \int_{F(\Delta\times[0,t])} dy_1dy_2dy_3 = \int_{\Delta\times[0,t]} |\det DF(x,s)|dx_1dx_2ds.$$

Par ailleurs $DF(x,s).(h,k) = Df(x).h + kN_f(x) + sDN_f(x).h$ donc

$$\det DF(x,s) = \det(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x)) + sA(x) + s^2B(x),$$

où $A$ et $B$ sont des termes qu'on ne detaillera pas impliquant des dérivées de $N_f$. En intégrant tout d'abord par rapport à $s$ (on utilise le théorème de Fubini), on a donc

$$\mathrm{vol}(V(t)) = \int_\Delta t\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x)\right) + \frac{t^2}{2}A(x) + \frac{t^3}{3}B(x)\ dx.$$

Ainsi l'aire de $D$ est $\int_B \det(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x))dx$, or $\det(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x)) = \|\frac{\partial f}{\partial x_1}\wedge\frac{\partial f}{\partial x_2}\| = \sqrt{\det\alpha_f}$ (montrer cette dernière égalité). On a donc montré que

$$\mathrm{Aire}(D) = \lim_{t\to 0}\frac{V(t)}{t} = \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det\alpha_f(x)}dx.$$

Notre définition de l'aire coïncide donc (du moins localement) avec la notion intuitive d'aire.

**Remarque :** On peut continuer la discussion sur les bonnes coordonnées. Il est clair que les aires que l'on voit sur une carte correspondent à un facteur près aux aires réelles si et seulement si $\det(\alpha_f)$ est constant. Sur les mappemondes habituellement utilisées les aires lues ne correspondent pas aux aires réelles. Souvent le Groenland est de taille comparable à l'Afrique ou à l'Amérique du sud.

Il est possible de faire des mappemondes sur lesquelles les aires sont correctes (c'est le cas des cartes obtenues par projection de Peters), mais si les angles et les aires lues sont justes alors les longueurs le sont ce qui est impossible.

**Exercice 4.** 1) À l'aide des coordonnées $(\theta,h)\mapsto R(\sqrt{1-h^2}\cos\theta, \sqrt{1-h^2}\sin\theta, h)$ (projection de Peters) calculer l'aire des sphères (on admettra que $S^2$ et $S^2$ privée d'un arc de grand cercle ont même aire). En déduire la formule donnant le volume des boules.

2) Un triangle sphérique est un triangle tracé sur la sphère unité dont les côtés sont des arcs de grands cercles (ie de centre 0). Montrer qu'un triangle sphérique d'angles $a$, $b$ et $c$ est d'aire $a+b+c-\pi$.

## 3.4 Deuxième forme fondamentale. Courbure.

Pour faire comme les grecs, il nous faut faire varier nos mâts. On veut donc dériver l'application de Gauss.

On a vu dans la preuve de la proposition 2.4.2 que si $\gamma$ est un arc différentiable à valeurs dans $\Sigma$ alors $f^{-1}\circ\gamma$ est différentiable. On en déduit que si $\gamma$ est un arc différentiable à valeurs dans $\Sigma$ et si $\nu$ est une application de Gauss de $\Sigma$ alors $\nu\circ\gamma$ est une application différentiable. En effet, $\nu\circ\gamma=(\nu\circ f)\circ(f^{-1}\circ\gamma)$ est la composée de deux applications différentiables. Comme il s'agit d'une propriété locale, on voit que cette propriété est encore vraie sur toute surface possédant une application de Gauss.

**Définition 3.4.1.** *Soit $\Sigma$ une nappe orientée, $\nu$ l'application de Gauss associée (ou plus généralement une surface munie d'une application de Gauss) et $p\in\Sigma$. La différentielle de $\nu$ en $p=f(x)$ est l'application linéaire $T_p\nu : T_p\Sigma\to\mathbb{R}^3$ définie par*

$$d_p\nu.X=(\nu\circ\gamma)'(0),$$

*où $\gamma$ est un arc différentiable tracé sur $\Sigma$ tel que $\gamma(0)=p$ et $\gamma'(0)=X$.*

Pour voir que $d_p\nu(p).X$ ne dépend pas du choix de $\gamma$, on utilise des coordonnées $(U,f)$. On a vu que $\nu\circ f=N_f\circ(f^{-1}\circ\gamma)$, par ailleurs $Df(x).(f^{-1}\circ\gamma)'(0)=X$, ce qui signifie que $(f^{-1}\circ\gamma)'(0)=[Df(x)]^{-1}X$ (on voit $Df(x)$ comme un isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $T_p\Sigma$). On voit donc que

$$d_p\nu(p).X=DN_f(x).[Df(x)]^{-1}X.$$

Toute mention à $\gamma$ à disparu. Remarquons qu'on a aussi montré que l'expression $DN_f(x).[Df(x)]^{-1}X$ ne dépend pas du choix de $(U,f)$.

**Proposition 3.4.2.** *La différentielle de l'application de Gauss de $\Sigma$ en $p$ est un endomorphisme de $T_p\Sigma$. Cet endomorphisme est symétrique c'est-à-dire*

$$\forall(X,Y)\in T_p\Sigma^2,\langle T_p\nu.X,Y\rangle=\langle X,T_p\nu.Y\rangle\,.$$

**Preuve :** On choisit des coordonnées $(U,f)$ et on définit $N_f$ comme précédemment. Soit $X\in T_p\Sigma$ et $\xi=Df(x)^{-1}.X\in\mathbb{R}^2$. Par définition $d_p\nu.X=\frac{d}{dt}|_{t=0}(N_f)(x+t\xi)$. Il s'agit donc de la dérivée d'un arc lisse tracé sur $S^2$. Donc $DN_f(x).\xi\in T_{\nu(p)}S^2$. Mais $T_{\nu(p)}S^2=\nu(p)^\perp=T_p\Sigma$. Ce qui montre le premier point.

Pour montrer le deuxième point, il suffit de montrer que

$$\left\langle d_{f(x)}\nu.\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right\rangle=\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),d_{f(x)}\nu.\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right\rangle.$$

Par définition $d_{f(x)}\nu.\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=\frac{\partial N_f}{\partial x_1}(x)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\in T_{f(x)}\Sigma$ on a aussi $\left\langle N_f(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right\rangle=0$. En dérivant cette égalité, on a

$$\left\langle\frac{\partial N_f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\rangle+\left\langle N,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right\rangle=0.$$

D'après le théorème de Schwarz le terme de droite est symétrique, il en est donc de même de celui de gauche. □

**Exemples 3.4.3.** Si $\Sigma$ est la sphère $S^2$ alors $\nu=\pm\mathrm{id}$ selon le choix de $\nu$ (rentrant ou sortant). Pour tout arc $\gamma:I\to S^2$ on a $\nu\circ\gamma=\pm\gamma$ et donc pour tout $p\in S^2$, $d_p\nu=\pm\mathrm{Id}$

Soient $\mathcal{C}$ le cylindre droit défini à l'exercice 2 et $(U,g)$ le paramétrage de $\mathcal{C}$ défini alors. Si on a fait l'exercice, on a trouvé $\nu\circ g(x_1,x_2)=(\cos x_1,\sin x_1,0)$. On a donc

$$J(\nu\circ g)(x)=\begin{pmatrix}-\sin x_1 & 0\\ \cos x_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$d_{g(x)}\nu.\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \text{ et } d_{g(x)}\nu.\frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = 0.$$

Ainsi la matrice de $d_{g(x)}\nu$ dans la base $(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x))$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Définition 3.4.4.** *On appelle endomorphisme de Weingarten (de $\Sigma$ en $p$), l'endomorphisme symétrique*

$$W_p = -d_p\nu : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$$

*(on fera attention au signe moins) et seconde forme fondamentale (de $\Sigma$ en $p$) la forme bilinéaire symétrique définie par*

$$II_p(X, Y) := -\langle d_p\nu.X, Y\rangle = \langle W_p.X, Y\rangle\,.$$

**Remarque 3.4.5.** Le fait que l'endomorphisme de Weingarten est symétrique ne signifie pas que sa matrice dans une base quelconque est symétrique (seule son écriture dans une base orthonormale l'est). Par contre, il est bien diagonalisable.

La proposition suivante donne une interpretation géométrique du nombre $II_p(X, X)$ (ainsi qu'une explication de la présence du signe $-$).

**Proposition 3.4.6.** *Soient $p \in \Sigma$, $(I, \gamma)$ un arc différentiable tracé sur $\Sigma$. Soit $p = \gamma(0)$ et $X = \gamma'(0)$. Alors*

$$\langle \gamma''(0), \nu\rangle = -\langle d_p\nu.X, X\rangle = II_p(X, X).$$

**Preuve :** Pour tout $t \in I$, on a $\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t))\rangle = 0$. Par définition $(\nu \circ \gamma)'(0) = d_p\nu.\gamma'(0)$ donc en dérivant la première égalité, on a $\langle \gamma''(0), \nu\rangle = -\langle \gamma'(0), d_p\nu.\gamma'(0)\rangle$. $\square$

On rappelle que $\langle \gamma''(0), \nu\rangle\, \nu$ est la projection orthogonale de l'accélération sur la normale à $T_p\Sigma$. Si on note $\gamma''(0)^T$ la partie tangentielle, on a donc

$$\gamma''(0) = \langle \gamma''(0), \nu(p)\rangle\, \nu(p) + \gamma''(0)^T.$$

La proposition 3.4.6 nous dit que $\langle \gamma''(0), \nu\rangle$ ne dépend que de $\gamma'(0)$. C'est la partie de l'accélération qui permet à $\gamma$ de rester dans $\Sigma$. Ainsi ce nombre décrit $\Sigma$. Il nous dit aussi comment se situe $\gamma$ par rapport au plan (affine) tangent. En effet,

$$\gamma(t) = \underbrace{[p + tX + t^2/2\gamma''(0)^T]}_{\in T_p^A\Sigma} + t^2/2\; II(X, X)\nu(p) + o(t^2).$$

On voit qu'au voisinage de 0, la courbe est dans le demi-espace délimité par $T_p^A\Sigma$ contenant $p + \nu(p)$ si $II(X, X) > 0$ dans celui contenant $p - \nu(p)$ si $II(X, X) < 0$. On ne peut rien dire si $II(X, X) = 0$.

On peut écrire $\gamma = p + \gamma_0 + h\,\nu(p)$ avec $\gamma_0$ à valeurs dans $T_p\Sigma$ et $h$ (comme hauteur) à valeurs dans $\mathbb{R}$. En comparant les développement limités on voit que $II_p(X, X) = h''(0)$ et que $h'(0) = 0$. On en déduit :

**Fait 3.4.7.** *Soit $\Sigma$ le graphe de $f_0 : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ lisse. Si $a \in U$ est tel que $Df(a) = 0$, alors en $p = (a, f_0(a))$, on a*

$$II_p = D^2 f_0(a).$$

*où $D^2 f_0$ est la différentielle seconde de $f_0$.*

**Définition 3.4.8.** *On appelle courbure de Gauss de $\Sigma$ au point $p$ le déterminant de l'endomorphisme de Weingarten. On la note $K_\Sigma(p)$.*

**Exemples 3.4.9.** Il découle de 3.4.3 que la courbure de la sphère unité est égale à 1 et que celle du cylindre est nulle (on dit que le cylindre est plat). Quelle est la courbure d'une sphère de rayon $R > 0$ ?

**Remarque 3.4.10.** L'endomorphisme $W_p$ dépend du choix d'une orientation, mais pas son déterminant. Le signe de la courbure ne dépend pas du choix d'une orientation. On déduit de l'exercice 3 que pour toute isométrie $\Psi$ de $\mathbb{R}^3$, $W_p^\Sigma = \pm W_{\Psi(p)}^{\Psi(\Sigma)}$ et $K_{\Psi(\Sigma)}(\Psi(p)) = K_\Sigma(p)$.

**Exercice 5.** Montrer que les valeurs propres de $W_p$ sont les valeurs extremales de l'application $X \mapsto II_p(X,X)$ restreinte aux vecteurs $X \in T_p\Sigma$ tels que $\|X\| = 1$. Elles correspondent donc aux directions dans lesquelles la surface se courbe le plus. On les appelle les *courbures principales*.

On remarque que le signe de la courbure nous dit si les deux courbures principales sont de même signe, autrement dit si les courbes correspondantes sont du même côté du plan tangent. On montre ainsi :

**Proposition 3.4.11.** *Soit $p$ un point $p$ de $\Sigma$ supposée plongée. Si $K_\Sigma(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage $\Omega$ de $p$ tel que $\Omega \cap M \cap T_p^A M = \{p\}$. Si $K_\Sigma(p) < 0$ alors pour tout voisinage $\Omega$ de $p$ il existe des points de $\Omega \cap M$ situés de part et d'autre de $T_A M$.*

**Preuve :** Le problème étant invariant par isométrie affine, on peut supposer que $p = 0$ et $T_p\Sigma$ est le plan horizontal $\{x_3 = 0\}$. D'après le théorème des sous-variétés, il existe une fonction $f_0$ telle qu'au voisinage de $p$ la nappe $\Sigma$ est le graphe de $f_0$. Le plan tangent en $p$ étant horizontal on a $Df_0(0) = 0$. D'après le fait, 3.4.7 $II_p(0) = D^2 f_0(0)$. On écrit le développement limité de $f_0$, il existe une fonction $\varepsilon$ tendant vers 0 en 0 telle que

$$f_0(x) = D^2 f(0).x^2 + \|x\|^2 \varepsilon(x).$$

Le déterminant de la hessienne est égal à $K(0)$. Si $K(0) > 0$ alors la hessienne est définie positive ou négative la fonction $f_0$ à un extremum local en 0. Si $K(0) < 0$ alors la hessienne est de signature $(1,1)$, 0 n'est pas un extremum local. □

On comparera avec le calcul de l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe et de son tangent affine demandé au chapitre précdent.

## Expression locale de $II$.

On se donne des coordonnées $(U, f)$ et, comme pour la première forme, on cherche la matrice symétrique, que l'on note $\beta_f$, de $II$ dans le repère $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$. Soient $A, B, C$ tels que

$$\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}^2$ et l'arc de $U$ défini par $\gamma(t) = f(x_1 + \xi_1 t, x_2 + \xi_2 t)$. Ses dérivées sont :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \xi_1 \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x + t\xi) + \xi_2 \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(x + t\xi) \\ \gamma''(0) &= \xi_1^2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1\xi_2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \xi_2^2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x). \end{aligned}$$

On a $II_p(\gamma'(0),\gamma'(0)) = \xi_1^2 A + 2\xi_1\xi_2 B + \xi_2^2 C$. Par ailleurs

$$\begin{aligned}
II_p(\xi,\xi) &= \langle \gamma''(0), \nu\rangle \\
&= \left\langle \gamma''(0), \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\wedge\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\wedge\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\|}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\wedge\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\|}\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \xi_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1\xi_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x) + \xi_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right) \\
&= \frac{1}{\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\wedge\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\|}\left[\xi_1^2\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x)\right) + 2\xi_1\xi_2\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x)\right)\right. \\
&\qquad \left. +\xi_2^2\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x)\right)\right].
\end{aligned}$$

Par identification, on en déduit que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\wedge\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\|}\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x)\right), \\
B &= \frac{1}{\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\wedge\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\|}\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(x)\right), \\
C &= \frac{1}{\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\wedge\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\|}\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x)\right).
\end{aligned}$$

On voit à nouveau que lorsque $\Sigma$ est le graphe d'une fonction lisse $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f_0(0) = 0$ et $Df(0) = 0$, alors $II_0$ est la hessienne de $f_0$ en 0.

**Proposition 3.4.12.** *Soit $(U, f)$ des coordonnées locales sur $\Sigma$ et $\alpha_f$ et $\beta_f$ les expressions locales des deux formes fondamentales. Alors pour tout $x \in U$ :*

$$K_\Sigma(f(x)) = \det(\beta_f\alpha_f^{-1}) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}.$$

**Preuve :** Soit $\omega_f(x)$ la matrice de $T_p\nu(p)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$. Pour tout $\xi, \zeta$ on a

$$II_p(Df(x).\xi, Df(x).\zeta) = {}^t\xi\beta_f(x)\zeta.$$

Mais aussi

$$II_p(Df(x).\xi, Df(x).\zeta) = -\langle T_p\nu.Df(x).\xi, Df(x).\zeta\rangle = {}^t(\omega_f(x).\xi)\alpha_f(x).\zeta.$$

Donc ${}^t\omega_f\alpha_f = \beta_f$ ou si on préfère $\beta_f = \alpha_f\omega_f$. $\square$

**Exemples 3.4.13.** Une surface de révolution $S$ est une surface paramétrée par une application de la forme :

$$f(u, v) = (\gamma_1(v)\cos u, \gamma_1(v)\sin u, \gamma_2(v))$$

où $0 < u < 2\pi$, $a < v < b$ et $\gamma_1(v) > 0$. L'arc $\gamma = (\gamma_1, 0, \gamma_2)$ est appelé la génératrice de $S$. La surface $S$ est obtenue en faisant tourner $\gamma$ autour de l'axe $Ox_3$. Nous supposons la génératrice paramétrée par longueur d'arc, c'est-à-dire $(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = 1$. On a alors

$$\alpha_f = \begin{pmatrix} \gamma_1^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On utilise les formules ci-dessus pour calculer $\beta_f$.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\gamma_1}\begin{vmatrix} -\gamma_1\sin u & \gamma_1'\cos u & -\gamma_1\cos u \\ \gamma_1\cos u & \gamma_1'\sin u & -\gamma_1\sin u \\ 0 & \gamma_2' & 0 \end{vmatrix} = -\gamma_1\gamma_2', \\
B &= 0, \\
C &= \gamma_2'\gamma_1'' - \gamma_2''\gamma_1'.
\end{aligned}$$

On déduit de la proposition 3.4.12 que la courbure de $S$ est donnée par

$$K_S = -\frac{\gamma_2'(\gamma_2'\gamma_1'' - \gamma_2''\gamma_1')}{\gamma_1}.$$

Comme $(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = 1$, on a $\gamma_1'\gamma_1'' = -\gamma_2'\gamma_2''$ et donc

$$K_S = -\frac{\gamma_2'(\gamma_2'\gamma_1'' - \gamma_2''\gamma_1')}{\gamma_1} = -\frac{(\gamma_2')^2\gamma_1'' + \gamma_1''(\gamma_1')^2}{\gamma_1} = -\frac{\gamma_1''}{\gamma_1}.$$

Remarquons que les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$ sont orthogonaux à la fois pour $I$ et pour $II$. Il s'agit donc des directions principales de $S$. Les courbures principales sont donc données par

$$\begin{aligned} II(\tfrac{\partial f}{\partial u}, \tfrac{\partial f}{\partial u})/I(\tfrac{\partial f}{\partial u}, \tfrac{\partial f}{\partial u}) &= -\tfrac{\gamma_2'}{\gamma_1} \\ II(\tfrac{\partial f}{\partial v}, \tfrac{\partial f}{\partial v})/I(\tfrac{\partial f}{\partial v}, \tfrac{\partial f}{\partial v}) &= -\gamma_2'\gamma_1'' - \gamma_2''\gamma_1'. \end{aligned}$$

**Exercice 6.** Donner un exemple de surface de révolution à courbure constante négative.
Faire un dessin du tore $T$ obtenu en prenant $\gamma = (2 + \cos v, 0, \sin v)$. Déterminer les points où la courbure est positive, ceux où elle est négative.

## 3.5 Theorema Egregium.

Partant de l'idée que ce que perçoit de $\Sigma$ un de ses habitants (plats) c'est la première forme fondamentale et que pour comparer deux formes fondamentales on n'a que l'expression en coordonnées locales, on pose la définition suivante.

**Définition 3.5.1.** *Deux nappes $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ sont dites isométriques s'il existe des coordonnées $(U, f)$ et $(V, g)$ resp. sur $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ telle que $\alpha_f = \alpha_g$.*

**Exemples 3.5.2.**
— L'existence de paramétrage par longueur d'arc dit que deux nappes de dimension 1 sont toujours localement isométriques.
— Un morceau de plan et un morceau de cylindre sont isométriques mais leurs deuxièmes formes fondamentales sont différentes.
— Soit $p$ et $q$ deux points de $S^2$, il existe un voisinage $\Omega$ de $p$ et un voisinage $\Omega'$ de $q$ tels que $\Omega \cap S^2$ et $\Omega' \cap S^2$ sont isométriques.

La discussion sur la longueur des courbes lues sur une carte se reformule en : la sphère est-elle localement isométrique au plan ? La réponse est finalement donnée par le (remarquable) théorème suivant.

**Théorème 3.5.3** (*Theorema Egregium* de Gauss)**.** *Deux nappes isométriques ont même courbure.*

**Preuve :** Si on arrive à trouver des coordonnées $(U, f)$ sur $\Sigma$ pour lesquelles on sait calculer $K$ en fonction des coefficients de $\alpha_f$, le théorème sera prouvé. On cherche donc des coordonnées telles que $\alpha_f$ soit le plus simple possible (mais si le théorème est vrai alors $\alpha_f$ ne peut pas être trop simple non plus). Le lemme suivant qui sera prouvé plus tard donne de telles coordonnées.

**Lemme 3.5.4.** *Au voisinage de tout point de $\Sigma$ il existe des coordonnées $(U, f)$ telles que*

$$\alpha_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

*où $J$ est une fonction lisse partout non nulle.*

On se place dans ces coordonnées et on écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$. Il existe des coefficients (variables) traditionnellement notés $\Gamma^k_{i,j}$ et appelés *symboles de Christoffel* tels que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_k \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_k} + II(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}) N_f, \qquad (*)$$

le coefficient devant $N_f$ a été obtenu à la proposition 3.4.2. Dans la suite on remplace la notation $\frac{\partial}{\partial x_i}$ par $\partial_i$. On note $\omega_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

On part des égalités $\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = 1$ et $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0$ et on dérive :

$$\begin{aligned}
\partial_1(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) &= 2 \left\langle \partial^2_{11} f, \partial_1 f \right\rangle = 0, \\
\partial_2(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) &= 2 \left\langle \partial^2_{21} f, \partial_1 f \right\rangle = 0, \\
\partial_1(\langle \partial_2 f, \partial_1 f \rangle) &= \left\langle \partial^2_{12} f, \partial_1 f \right\rangle + \left\langle \partial_2 f, \partial^2_{11} f \right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

On voit donc que $\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = 0$ et donc $\partial^2_{11} f = A N_f$. On a aussi $\Gamma^1_{12} = 0$. On calcule maintenant $\Gamma^2_{12}$ :

$$2J\partial_1 J = \partial_1 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \left\langle \partial^2_{12}, \partial_2 f \right\rangle = 2\Gamma^2_{12} \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2\Gamma^2_{12} J^2.$$

On note $J'$ et $J''$ les dérivées $\partial_1 J$ et $\partial^2_{11} J$. Par conséquent $\partial^2_{12} f = \frac{J'}{J} \partial_2 f + B N_f$. D'après le lemme de Schwarz, on a $\partial_2(\partial^2_{11} f) = \partial_1(\partial_{12} f)$. En remplaçant par les expressions trouvées, on a

$$(\partial_2 A) N_f + A \partial_2 N_f = \partial_1(\frac{J'}{J})\, \partial_2 f + \frac{J'}{J}\, \partial^2_{12} f + \partial_1 B\, N_f + B\, \partial_1 N_f.$$

Par définition la matrice de $\omega_f$ ci-dessus est celle $-DN_f$, d'où, en remplaçant à nouveau $\partial^2_{12} f$ :

$$(\partial_2 A) N_f - A(c\partial_1 f + d\partial_2 f) = (\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2})\partial_2 f + \frac{J'}{J}\left(\frac{J'}{J}\partial_2 f + B N_f\right) + (\partial_1 B) N_f - B(a\partial_1 f + b\partial_2 f).$$

En considérant le coefficient devant $\partial_2 f$, on obtient $\frac{J''}{J} = Ad - Bb$. Vu la forme de $\alpha_f$ et sachant que $\beta_f = \alpha_f \omega_f$, on a $A = a$ et $B = c$. Ainsi

$$-\frac{J''}{J} = ad - bc = \det(\omega_f) = K. \qquad \square$$

**Corollaire 3.5.5.** *Quel que soit le bout de terre qu'elle représente une carte est toujours fausse.*

**preuve du corollaire :** Le plan et la sphère ont des courbures partout différentes. Ils sont nulle part isométriques.$\square$

La réciproque du *Theorema egregium* est fausse :

**Exercice 7.** Montrer que la nappe $\Sigma$ paramétrée par

$$f\ :\ (u,v) \longmapsto (u\cos v, u \sin v, \log u)$$

et l'hélicoïde paramétré par

$$g\ :\ (u,v) \longmapsto (u\cos v, u\sin v, v)$$

ont même courbure mais ne sont pas isométriques.

**Exercice 8.** Soit $(U, f)$ des coordonnées sur $\Sigma$ vérifiant les conclusions du lemme 3.5.4. Quitte à restreindre $U$ on le suppose convexe. Soient $(a, c)$ et $(b, c)$ deux points de $U$ et $\gamma : [0, 1] \to \Sigma$ l'arc paramétré défini par $\gamma(t) = f(ta + (1-t)b, c)$. Montrer que $\Gamma$ est le plus court arc tracé sur $\Sigma$ reliant $f(a, c)$ et $f(b, c)$. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma''(t)$ est perpendiculaire à $T_{\gamma(t)}\Sigma$.

## 3.6 Géodésiques.

Soit $p \in \Sigma$ et $X \in T_p\Sigma$. On cherche la trajectoire $(I, \gamma)$ d'un point partant de $p$ dans la direction $X$ allant toujours droit devant lui tout en restant sur $\Sigma$. On cherche, en fait, l'analogue du mouvement rectiligne uniforme. Ce dernier est caractérisé par $\gamma'' = 0$. On a vu à la proposition 3.4.6 que $\langle \gamma'', \nu \rangle$ est imposé par $\Sigma$. A priori le terme

$$\gamma''(t) - \langle \gamma'', \nu(\gamma(t)) \rangle \, \nu(\gamma(t)),$$

la partie tangentielle de l'accélération est libre. On va demander qu'elle soit nulle. Il n'est pas nécessaire de demander à $\Sigma$ d'être une nappe, tout ceci à un sens sur une surface de $\mathbb{R}^3$.

**Définition 3.6.1.** *Un arc paramétré deux fois dérivable $(I, \gamma)$ tracé sur $\Sigma$ tel que pour tout $t \in I$ $\gamma''(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma^\perp$ est appelé une géodésique de $\Sigma$.*

On fera attention au fait que le reparamétrage d'une géodésique n'est pas forcément une géodésique.

**Exemples 3.6.2.** Les grands cercles de $S^2$, c'est-à-dire les courbes obtenues en prenant l'intersection de la sphère avec un plan $P$ passant par le centre de la sphère, sont des géodésiques de la sphère. Plus précisément, si $(I, \gamma)$ est un paramétrage par longueur d'arc de $P \cap S^2$, alors $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$, de plus $\gamma'$ et $\gamma''$ sont contenus dans $P$ et non nuls. Ainsi $\{\gamma', \gamma''\}$ est une base orthogonale de $P$. Donc $\gamma''$ est proportionnel à $\nu$.

De même si $S$ est une surface de révolution paramétrée par $f(u, v) = (\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_2(v))$ (cf 3.4.13) alors les méridiens, ie les arcs paramétrés par $v \mapsto (\gamma_1(v) \cos u_0, \gamma_1(v) \sin u_0, \gamma_2(v))$ sont des géodésiques.

**Proposition 3.6.3.** *Les géodésiques sont toujours parcourues à vitesse constante.*

**Preuve :** Soit $(I, \gamma)$ une géodésique. La dérivée de l'application $t \mapsto \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$ est donnée par $t \mapsto 2 \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle$. Comme $\gamma''(t)$ est perpendiculaire au tangent ceci est nul. La norme de $\gamma'(t)$ est donc constante.□

**Théorème 3.6.4.** *Pour tout point $p \in \Sigma$ et tout vecteur $X \in T_p\Sigma$, il existe une unique géodésique « maximale[2] » $(I, \gamma)$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$. Celle ci est lisse.*

**Preuve :** Soit $(U, f)$ un système de coordonnées sur $\Sigma$ et $c : I \to U$ un arc de $U$. On cherche à savoir à quelle condition $\gamma = f \circ c$ est une géodésique. On a

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= D^2 f(c(t)).c'(t)^2 + Df(c(t)).c''(t) \\ &= \textstyle\sum_{i,j} c_i'(t) c_j'(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c(t)) + \sum_k c_k''(t) \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Ce qui donne en utilisant les $\Gamma_{i,j}^k$ vus plus haut :

$$\begin{aligned} \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \nu(\gamma(t)) \rangle \, \nu(\gamma(t)) &= \textstyle\sum_{i,j} (c_i'(t) c_j'(t) \sum_k \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}) + \sum_k c_k''(t) \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ &= \textstyle\sum_k \left( c_k''(t) + \sum_{i,j} c_i'(t) c_j'(t) \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{\partial f}{\partial x_k}(c(t)) \end{aligned}$$

Ainsi $\gamma$ est une géodésique si et seulement si pour $k = 1$ et $k = 2$ on a pour tout $t \in I$

$$c_k''(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k c_i'(t) c_j'(t) = 0. \qquad (**)$$

Ainsi $(I, \gamma)$ est une géodésique si et seulement si $(I, c)$ est une solution de l'équation différentielle ci-dessus. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet alors de conclure.□

2. au sens des solutions d'équations d'équations différentielles

**Exercice 9.** Soit $(]a,b[,\gamma)$ la géodésique maximale telle que $\gamma(0)=p$ et $\gamma'(0)=X$ et $k\in\mathbb{R}^*$. Montrer que $(]a/k,b/k[,t\mapsto\gamma(kt))$ est la géodésique $\gamma(0)=p$ et $\gamma'(0)=kX$.
Montrer que les seules géodésiques de $S^2$ sont les grands cercles parcourus à vitesse constante.

Au vu de la définition donnée et de l'équation différentielle $(**)$, on peut se demander si la notion de géodésique à un sens pour un "habitant" de $\Sigma$ qui n'a pas conscience de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 10.** En exprimant de deux façons différentes $\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right\rangle$, montrer que l'on peut exprimer les $\Gamma_{i,j}^k$ en fonction de $E$, $F$ ,$G$ et de leurs dérivées (c'est ce qu'on fait dans un cas particulier pour montrer le théorème de Gauss).

Début de solution :

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right\rangle &= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial x_1} \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right\rangle &= \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial x_2} \end{cases}$$

Ainsi les géodésiques ont bien un sens intrinsèque.

**Preuve du lemme de Gauss 3.5.4** :
On a vu dans l'exercice 8 que les coordonnées données par le lemme de Gauss sont etroitement liées aux géodésiques de $\Sigma$ (tous les segments horizontaux de $U$ donnent des géodésiques). C'est précisément ce lien qui permet de montrer le lemme 3.5.4. D'après les théorèmes classiques sur les équations différentielles, tout couple $(x_0,v_0)\in u\times\mathbb{R}^2$, possède un voisinage ouvert $V\times W$ et un $\varepsilon>0$ tels que pour tout $(x,v)\in V\times W$ il existe une unique solution $c_{x,v}$ l'équation différentielle $(**)$, définie sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$ et de condition initiale $(x,v)$. De plus (c'est le théorème de dépendance aux conditions initiales, cf. Laudenbach p.94 théorème IV.1.2. par exemple), l'application

$$\begin{aligned} \Phi :- ]\varepsilon,\varepsilon[\times V\times W &\to U \\ (t,x,v) &\mapsto c_{x,v}(t) \end{aligned}$$

est lisse. On déduit de l'exercice 9 qu'il existe $\delta>0$ tel que $\Phi$ est définie sur $]-2,2[\times V\times B(0,\delta)$. La restriction de $\Phi$ à $\{1\}\times\{x\}\times B(0,\delta)$ est une application lisse traditionnellement notée $\exp_x$ [3]. Par définition $\exp_x(v)=\Phi(1,x,v)=c_{x,v}(1)$.

**Lemme 3.6.5.** *Pour tout $x\in U$, l'application $\exp_x$ est un difféomorphisme local au voisinage de* $0$.

**Preuve :** L'application $\exp_x$ est lisse, il suffit donc de montrer que la différentielle en 0 est inversible. Pour tout $v\in\mathbb{R}^2$, on a (on utilise encore l'exercice 9) :

$$D\exp_x(0).v = \frac{d}{ds}_{|s=0}\exp_x(sv) = \frac{d}{ds}_{|s=0} c_{x,sv}(1) = \frac{d}{ds}_{|s=0} c_{x,v}(s) = v.$$

Ainsi $D\exp_x(0)=\mathrm{Id}$. □

Soit $(X_1,X_2)$ une base orthonormée de $T_{f(x)}\Sigma$ et soit $(\xi_1,\xi_2)=([Df(x)]^{-1}X_1,[Df(x)]^{-1}X_2)$. Pour $\rho>0$ assez petit l'application $\Phi_0$ définie sur $]0,\rho[\times[0,2\pi[$ par $\Phi_0(r,\theta)=r(\cos(\theta)\xi_1+\sin(\theta)\xi_2)$ a son image dans $B(0,\delta)$. La restriction de $\exp_x\circ\Phi_0$ à $]0,\rho[\times]0,2\pi[$ est donc un difféomorphisme sur son image (contenue dans $U$).

3. en fait ce qu'on appelle habituellement exponentielle c'est l'application $f\circ\exp_x\circ[Df(x)]^{-1}$ qui va d'un voisinage de 0 dans $T_p\Sigma$ dans un voisinage de $p$ dans $\Sigma$

On définit maintenant des nouvelles coordonnées locales $(V, g)$ sur $\Sigma$. On prend $V = ]0, \rho[\times]0, 2\pi[$ et $g = f \circ \exp_x \circ \Phi_0$. Montrons que $\alpha_g$ est de la forme voulue.

Soit $\gamma_\theta$ l'arc défini par $\gamma_\theta(r) = g(r, \theta)$. Par construction, il s'agit d'un arc géodésique. On a donc :

$$\langle \partial_r g, \partial_r g\rangle = \langle \gamma'_\theta(r), \gamma'_\theta(r)\rangle = \langle \gamma'_\theta(0), \gamma'_\theta(0)\rangle = \| \cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2\|^2 = 1.$$

On veut maintenant montrer que $\langle \partial_r g, \partial_\theta g\rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_r\langle \partial_r g, \partial_\theta g\rangle &= \langle \partial^2_{rr} g, \partial_\theta g\rangle + \langle \partial_r g, \partial^2_{r\theta} g\rangle \\ &= \langle \gamma''_\theta(r), \partial_\theta g\rangle + \langle \partial_r g, \partial^2_{r\theta} g\rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2}\partial_\theta\langle \partial_r g, \partial_r g\rangle = 0, \end{aligned}$$

puisque $\gamma_\theta$ est une géodésique et que $\langle \partial_r g, \partial_r g\rangle$ est constant. Par ailleurs

$$\partial_\theta g(r, \theta) = \partial_\theta(f \circ \exp_x(r(\cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2)) = D(f \circ \exp_x)(\Phi_0(r, \theta)).(r(-\sin(\theta)\xi_1 + \cos(\theta)\xi_2)).$$

On en déduit que $\lim_{r\to 0} \partial_\theta g(r, \theta) = 0$ et donc $\lim_{r\to 0}\langle \partial_r g, \partial_\theta g\rangle = 0$. Or, d'après ce qui précède $\langle \partial_r g, \partial_\theta g\rangle$ ne dépend pas de $r$ et donc $\alpha_g$ a bien la forme voulue !$\square$

**Corollaire 3.6.6.** *Les géodésiques sont exactement les courbes qui minimisent localement la longueur. Si une courbe minimise globalement la longueur alors c'est une géodésique.*

Autrement dit si 2 points sont suffisamment proches il existe un plus court chemin les reliant et ce chemin est un arc de géodésique.

**Preuve :** Si $y$ est suffisament proche de $x$, alors il existe $v$ tel que $y = \exp_x(v)$. En se plaçant dans les coordonnées données par le lemme de Gauss, on déduit de l'exercice 8 que le segment géodésique $t \mapsto \exp_x(tv)$ minimise la longueur.

Inversement si $\gamma$ est le plus court chemin reliant deux points, il minimise aussi la longueur entre chacun de ses points. En les choisissant suffisamment proche on en déduit que $\gamma$ est une géodésique. $\square$.