Licence de Mathématiques, parcours mathématiques fondamentales
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Géométrie Différentielle (4TMF602U) **30/04/2019** **durée : 3h00**

Épreuve de M. Mounoud Documents interdits, calculette homologuée autorisée

Questions indépendantes

1) Montrer que 3 droites concourantes contenues dans une surface lisse de $\mathbb{R}^3$ sont forcément coplanaires.
2) Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application lisse et $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin lisse. Démontrer que

$$\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

Exercice 1

Les questions **I** et **II** sont indépendantes.

I. Soit X le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-1)^2+y^2 = 1 \text{ et } y-xz = 0\}$.

1) Montrer que X est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
2) Donner une base de l'espace tangent à X en $(2,0,0)$.
3) Donner un paramétrage de $\{(x,y,z) \in X \,|\, x = 0\}$ et de $\{(x,y,z) \in X \,|\, x \neq 0\}$. Dessiner approximativement X.

II. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = xyz$ et $\mathbf{S}$ la sphère de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rayon 1. Déterminer les points critiques de la restriction de g à $\mathbf{S}$. En déduire le minimum et le maximum de $g_{|\mathbf{S}}$.

Exercice 2

Soit α la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par $\alpha_{(u,v)} = \dfrac{1}{u^2+v^2}(udv - vdu)$. Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application lisse définie par $\Phi(x,y,z) = (x^2+y^2-1, xz)$.

1) Montrer que α est fermée.
2) Déterminer $\Phi^{-1}(0,0)$. On note U son complémentaire.
3) Montrer que

$$(\Phi^*\alpha)_{(x,y,z)} = \frac{z(y^2-x^2-1)\,dx - 2xyz\,dy + x(x^2+y^2-1)\,dz}{(x^2+y^2-1)^2+(xz)^2},$$

où $\Phi^*\alpha$ désigne l'image réciproque de α par Φ. Quel est son domaine de définition ?

4) Montrer sans calculs que $\Phi^*\alpha$ est fermée.

5) Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ défini par $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 0, \sqrt{2}\sin t)$. Décrire l'image de γ. Calculer
$$\int_\gamma \Phi^*\alpha.$$

6) La forme $\Phi^*\alpha$ est-elle exacte ?

Exercice 3

Soit $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^3$, $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$ une courbe lisse, plane, paramétrée par longueur d'arc et soit
$$\begin{aligned} f :]a, b[\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (x(u) - v\,y'(u), y(u) + v\,x'(u), \ell v), \end{aligned}$$
où $\ell \in [0, +\infty[$.
On note k la courbure algébrique de γ (vue comme courbe plane), on rappelle que $k(s) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)$.

1) Montrer que l'image de f peut s'écrire comme une union de droites.

2) Dessiner l'image de f lorsque $]a, b[= \mathbb{R}$ et $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$.

   On revient au cas général.

3) Calculer $\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}$. En déduire que la restriction de f à $U = \{(u, v) \in]a, b[\times\mathbb{R}|\, vk(u) < 1\}$ est une immersion.

4) Donner l'expression de la première fondamentale de la nappe (U, f) dans les coordonnées (u, v) en fonction de ℓ, k et v (seulement).

5) Donner l'expression $N(u, v)$ de l'application de Gauss de (U, f) au point $f(u, v)$ (on pourra utiliser le fait que $\|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2$).

6) Pour tout $(u, v) \in U$, calculer $\langle N(u, v), (0, 0, 1)\rangle$. En déduire que l'application de Gauss est à valeurs dans un cercle que l'on note C.

7) Pour tout $(u, v) \in U$, montrer que l'endomorphisme de Weingarten au point $f(u, v)$ est à valeurs dans l'espace tangent à C au point $N(u, v)$. En déduire que la courbure de la nappe (U, f) est partout nulle.