Université de Bordeaux - Année 2022-2023
Master MEEF mention mathématiques
Géométrie

Géométrie dans le plan complexe

On rappelle que le produit scalaire de deux vecteurs d'affixes respectives z et z' est la partie réelle de $z\,\overline{z}'$, et que la partie imaginaire de $z\,\overline{z}'$ est le déterminant de ces deux vecteurs.

1. Donner une interprétation géométrique du module et de l'argument du nombre complexe $\dfrac{c-a}{b-a}$, où a, b et c sont les affixes de trois points A, B et C du plan.

2. Soient $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ et $c = e^{i\gamma}$ trois nombres complexes de module 1, avec α, β, γ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

a. Identifier le module et l'argument de $b - a$.

b. En déduire l'argument de $(c - a)/(b - a)$. Que remarque-t'on ?

3. Similitudes.
Soit f une transformation du plan dont l'écriture complexe est $z' = a\,z + b$ avec a et b deux nombres complexes.
a. Identifier f quand a vaut 0 ou 1. Dans toute la suite, on suppose a différent de 0 et 1.
b. Montrer que f admet un unique point fixe et déterminer son affixe. Déterminer les conditions sur a et b assurant que f est une rotation (resp. une homothétie).
c. Montrer que f est une similitude plane [il existe une constante $k > 0$ telle que pour tous M et N dans le plan on a $d(f(M), f(N)) = k\,d(M, N)$] et déterminer son rapport (la constante k).
d. Montrer qu'une similitude plane préserve les angles géométriques (non orientés). Elle est dite directe si elle préserve les angles orientés, et indirecte si elle les transforme en leur opposé. L'application f est-elle directe ou indirecte ?
e. Soient f une similitude plane directe, A, B et M trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et z. On note $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $M' = f(M)$, d'affixes a', b' et z'.
Montrer que $\dfrac{z'-b'}{z'-a'} = \dfrac{z-b}{z-a}$ et en déduire que f s'exprime en nombres complexes sous la forme $z' = \alpha\,z + \beta$.
f. Identifier la transformation du plan dont l'écriture complexe est $z \mapsto \overline{z}$, et en déduire que toute similitude plane indirecte admet une écriture en nombres complexes de la forme $z \mapsto \alpha\,\overline{z} + \beta$.

4. Soient A, B et C trois points distincts d'un plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note a, b et c les affixes respectives de ces trois points.
a. Montrer que le triangle ABC est équilatéral dans le sens direct si et seulement si $a + j\,b + j^2\,c = 0$ où $j = \exp(2i\pi/3)$.
b. On suppose ABC quelconque ; on construit P, Q et R tels que ABR, CAQ et BCP sont équilatéraux directs de centres de gravités respectifs A', B' et C'.
Montrer que $A'B'C'$ est équilatéral. Est-il direct ou indirect ? On fera deux figures selon que ABC est direct ou indirect.

Homographies - cadre réel

Une homographie est une fonction de la forme $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $ad - bc \neq 0$.

5. Identifier le domaine de définition de f et calculer sa dérivée $f'(x)$ en précisant le domaine de dérivabilité. Expliquer pourquoi on suppose $ad - bc \neq 0$?

6. Étudier la fonction f et vérifier qu'elle est injective.

7. On ajoute un point "à l'infini", noté ∞, et on prolonge f à $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ en posant $f(\infty) = \infty$ si $c = 0$ et dans le cas contraire $f(\infty) = a/c$ et $f(-d/c) = \infty$.

Vérifier que cette extension est une bijection de $\hat{\mathbf{R}}$ dans lui-même.

8. Soient f et g deux homographies, données respectivement par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $g(x) = \dfrac{a'x+b'}{c'x+d'}$. Montrer que $g \circ f$ est une homographie et identifier ses coefficients. En déduire un homomorphisme de groupes de $GL(2, \mathbf{R})$ (groupe des matrices 2×2 inversibles à coefficients réels) vers le groupe des bijections de $\hat{\mathbf{R}}$. Identifier le noyau de cet homomorphisme. Comment s'écrit la réciproque f^{-1} de f ?

9. Montrer que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$. En déduire que le groupe des homographies est engendré par les transformations affines $x \mapsto ax+b$ et l'inversion $x \mapsto 1/x$.

Cadre complexe

On rappelle que l'équation complexe d'un cercle dont le centre Ω a pour affixe ω est de la forme $z\,\overline{z} - \omega\,\overline{z} - \overline{\omega}\,z + c = 0$ avec c réel.

10. Montrer de deux façons différentes que, si a et b sont deux nombres complexes fixés, l'ensemble des points du plan dont l'affixe z est telle que $\dfrac{z-b}{z-a}$ est imaginaire pur est un cercle.

11. Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $z\,\overline{z} - \omega\,\overline{z} - \overline{\omega}\,z + c = 0$. Montrer que l'image de ce cercle par l'inversion $z \mapsto 1/z$ est soit un cercle (si $c \neq 0$) dont on déterminera le centre, soit une droite si $c = 0$.

12. Quelle est l'image d'un cercle par une similitude plane ?

13. Montrer que l'image d'un cercle ou d'une droite par une homographie est toujours un cercle ou une droite (on utilisera le prolongement de l'homographie à $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ et on ajoutera le point à l'infini à chacune des droites).

14. Soient a, b et c trois nombres complexes différents. Montrer qu'il existe une unique homographie h vérifiant $h(a) = \infty$, $h(b) = 0$ et $h(c) = 1$, et que cette homographie est donnée par $h(z) = \dfrac{c-a}{c-b} \times \dfrac{z-b}{z-a}$. Que se passe-t-il pour $a = \infty$? pour $b = \infty$? pour $c = \infty$?

15. Soient quatre points distincts du plan A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d. On appelle birapport des quatre points le nombre complexe $[a, b; c, d] = \dfrac{c-a}{c-b} \times \dfrac{d-b}{d-a}$.

Montrer que ce birapport est réel si et seulement si les quatre points sont alignés ou cocycliques. En déduire que les quatre points sont alignés ou cocycliques si et seulement si on a égalité des angles de droites $(\widehat{DA, DB}) = (\widehat{CA, CB})$.