Université de Bordeaux

TPM103U Bases de Mathématiques pour les sciences, 2020

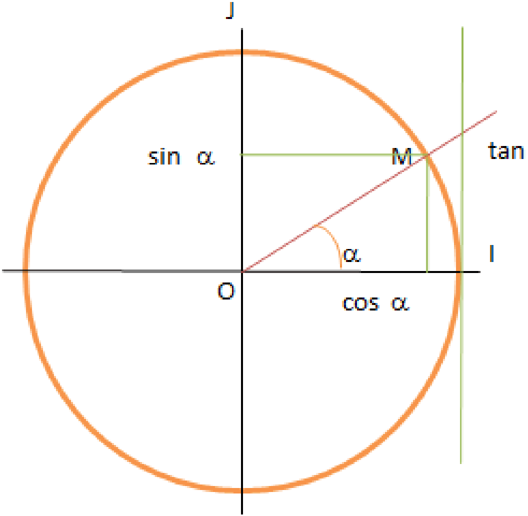
Chapitre 4 : Nombres Complexes

L'objectif de ce chapitre est le calcul des racines d'un nombre complexe et la résolution de polynôme de second degré à coefficient complexe. Ce chapitre commence par des **rappels** sur la trigonométrie et les nombres complexs que nous survolerons (voir aussi les exercices sur WIMS pour les rappels).

4.1. Quelques rappels

4.1.1. Trigonométrie

On considère le cercle trigonométrique, le cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 1



Soit M' le point tel que $OM' = \cos(\alpha)$. Le triangle OMM' est rectangle et l'hypoténuse est de longueur $OM = 1$ donc le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\alpha)\overrightarrow{OI} + \sin(\alpha)\overrightarrow{OJ}.$$

4.1.2. Un tableau utile

Voici quelques valeurs souvent rencontrées qui permettent de retrouver l'argument de certains nombres complexes de module 1 :

x en degrés : x en radians :	0 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	0
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Propriétés 1

- *La fonction cosinus est continue sur* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique,paire.*
- *La fonction sinus est continue sur* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique, impaire.*
- *La fonction tangente,* $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$, *continue sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*),* π*-périodique, impaire.*
- *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin)'(x) = \cos(x) \quad \textit{et} \quad (\cos)'(x) = -\sin(x).$$

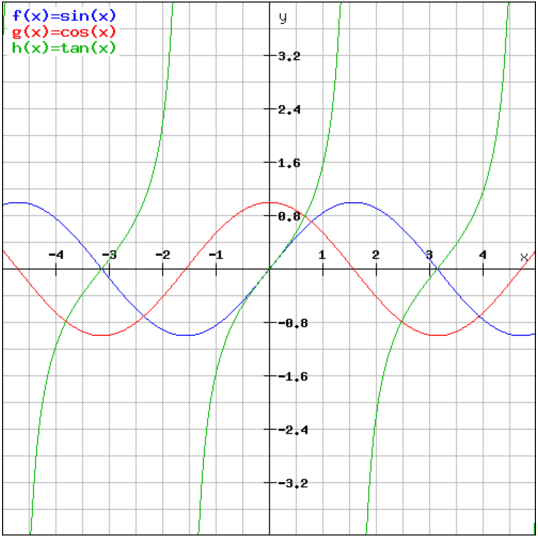
- *La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*), et :* $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Exercices : (1) Calculer si possible $\cos(\frac{11}{3}\pi)$, $\sin(-\frac{23}{4}\pi)$, $\tan(\frac{13}{6}\pi)$, $\tan(-\frac{11}{2}\pi)$.

(2) Vérifier l'égalité $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$. (3) Résoudre

les équations : $\cos(3x) = 1$ et $\sin(2x) = -3/2$.

Courbes représentatives de $\sin x$ et $\cos x$ et $\tan x$



Formules de trigonométrie

Soient $x, y, a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$	$\tan(\pi + x) = \tan(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, et donc $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, et donc $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Exercices : (1) Vérifier que pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$.

(2) Résoudre l'équation : $\sin(x)\cos(x) = 1/4$.

4.1.3 Nombres complexes

Dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^2 + 1 = 0$$

n'a pas de solution. On introduit alors un nouveau nombre appelé i vérifiant :

$$i^2 = -1.$$

On note alors

$$\boxed{\mathbb{C} := \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}}$$

et on l'appelle l'ensemble des **nombres complexes.**
Pour $z = a + bi \in \mathbb{C}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ on appelle

- $a = \operatorname{Re} z$ la *partie réelle* de z,
- $b = \operatorname{Im} z$ la *partie imaginaire* de z.

On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (tout élément $a \in \mathbb{R}$ s'écrit $a = a + 0i \in \mathbb{C}$).
Si $\operatorname{Re} z = 0$, on dit que z est *imaginaire pur*.
L'ensemble des nombres complexes non nuls est noté $\mathbb{C}^*$.

Proposition 2

(Unicité de l'écriture). Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont respectivement égales :

$$z = z' \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z' \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z'$$

Exercices : (1) Trouvez les parties réelle des nombres complexes : $1 + 2i$, i, 10.

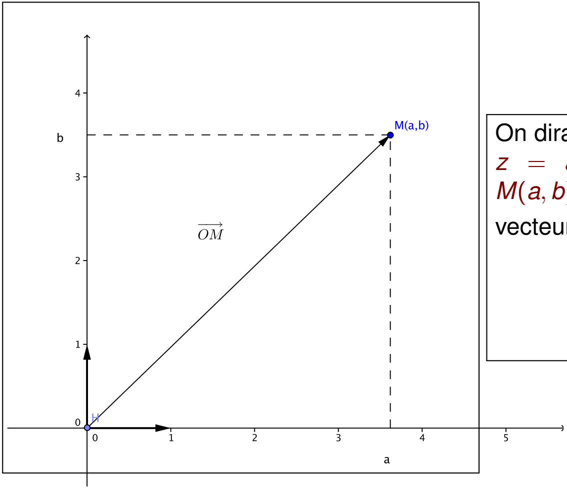
(2) Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $z = a^2 - 3a + 2 + (a - 1)i$. Pour quels réels a, z est un imaginaire pure.

4.1.4 Représentation graphique

Dans le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on peut associer à tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, un point $M(a, b)$ de coordonnées (a, b).

Notation $M(z) = M(a, b)$.

Réciproquement, à tout point M de $\mathcal{P}$, de coordonnées a et b dans le repère, on peut associer un nombre complexe $z = a + bi$.



On dira que $M(a, b)$ est *l'image* de $z = a + bi$ et z est *l'affixe* de $M(a, b)$. z est également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$

4.1.5 Forme trigonométrique

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $M = M(z)$ son image dans $\mathcal{P}$.

Definition 3

On appelle **module** de z, noté $|z|$, le nombre

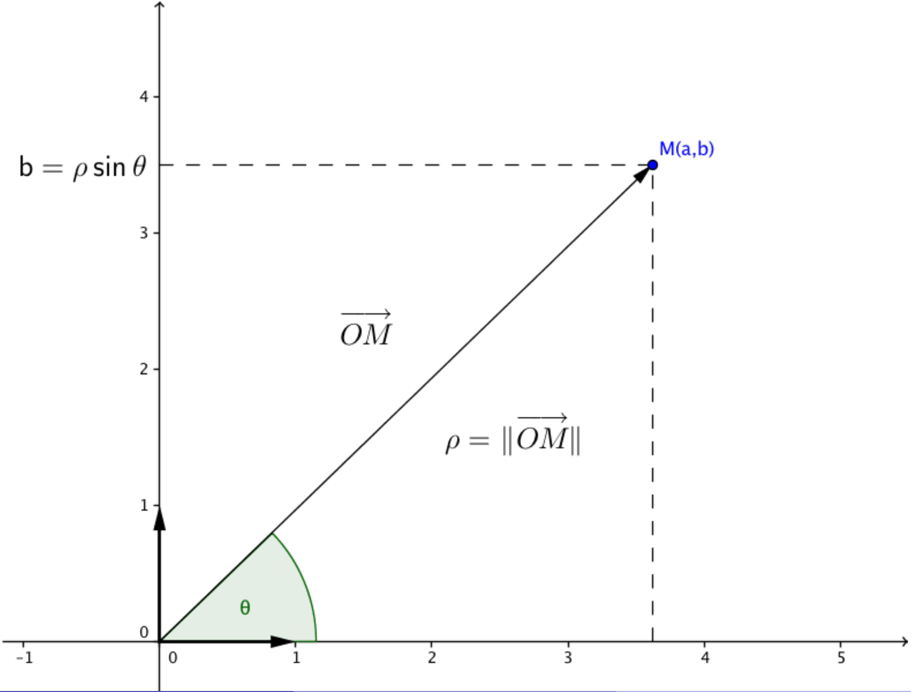
$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\overrightarrow{OM}\|.$$

Si $z \neq 0$, on appelle **un argument** de z tout nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho}. \end{cases}$$

Alors $\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$ est appelé **forme trigonométrique** du nombre $z \neq 0$. Le couple (ρ, θ) est appelé aussi les **coordonnées polaires** de z.

Exercice : Trouvez le module, un argument puis la forme trigonométrique des nombres complexes suivants : $2i$, $-i$, $1 + i$, $1 - \sqrt{3}i$.


$b = \rho \sin\theta$
M(a,b)
$\overrightarrow{OM}$
$\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$
θ
4
3
2
1
0
-1
0
1
2
3
4
5

4.1.6 Opérations

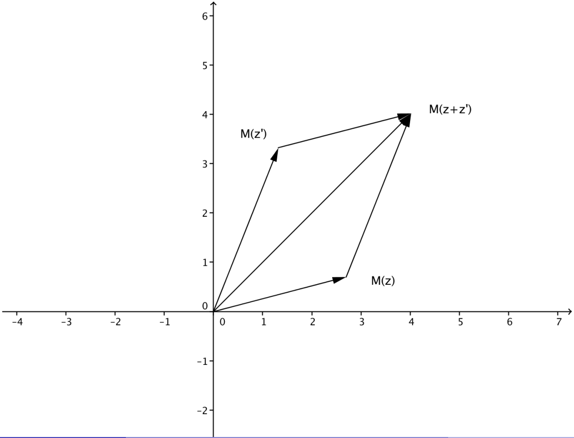
On effectue les opérations sur les complexes comme pour les réels :

Addition

Si $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, alors

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i.$$

Géométriquement, cela correspond à l'addition des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ d'affixe z et $\overrightarrow{OM'}$ d'affixe z' :



Notons que l'affixe du milieu de $[MM']$ est $\dfrac{z+z'}{2}$.

Multiplication

Forme algébrique : si $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, alors

$$zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

(Le calcul suit les lois habituelles de distributivitié, associativité, commutativité.)

Forme trigonométrique : Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ alors

$$\begin{aligned} zz' &= \rho\rho'\Big((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta)\Big) \\ &= \rho\rho'\Big(\cos(\theta+\theta') + i(\sin(\theta+\theta')\Big) \end{aligned}$$

Exercice : Trouvez la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe$(1-i)(\sqrt{3}+i)$ et $(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\sin(\frac{5}{6}\pi))(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi))$.

4.1.7 Propriétés Soit $z \in \mathbb{C}$ alors

- Pour tout $r > 0$, $|rz| = r|z|$.
- $|z| = 1 \iff z = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- $\boxed{\text{L'argument n'est pas défini pour } z = 0}$.

Soit $z \neq 0$. Si θ est un argument de z, alors $\theta + 2k\pi$ sera également argument de z pour tout $k \in \mathbb{Z}$. L'argument de z est défini à 2π près.

Notations Soit $z \neq 0$, on notera par :

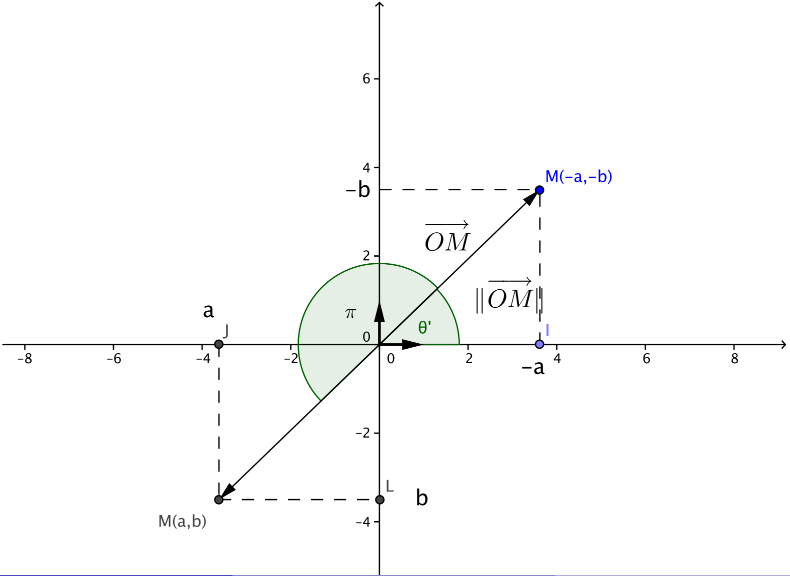
- $\theta =$ Arg z l'argument de z dans $]-\pi, \pi]$, c'est l'Argument Principal.
- arg z l'ensemble $\{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. On écrira aussi $\arg z \equiv \theta[2\pi]$ pour exprimer que l'argument est déterminé à 2π près.

Voici des propriétés de calcul de l'argument d'un complexe $z = a + ib$

- si z est réel ($b = 0$) et $a > 0$: $\arg(z) \equiv 0[2\pi]$,
- si z est réel ($b = 0$) et $a < 0$: $\arg(z) \equiv \pi[2\pi]$,
- si z imaginaire pur ($a = 0$) et $b > 0$: $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,
- si z imaginaire pur ($a = 0$) et $b < 0$: $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$,

Exercice : Trouvez le module et l'argument principal des nombre complexes suivants : $-i$, $\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\sin(\frac{5}{6}\pi)$, $\cos(\frac{7}{3}\pi) + i\sin(\frac{7}{3}\pi)$, $\cos(-\frac{17}{5}\pi) - i\sin(-\frac{17}{5}\pi)$, $(\cos(\frac{5}{6}\pi) + i\sin(\frac{5}{6}\pi))(\cos(\frac{3}{4}\pi) + i\sin(\frac{3}{4}\pi))$.

4.1.8 Calcul d'argument d'un complexe dont la partie réelle est négative



Par exemple, si $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on retrouve des valeurs caractéristiques du tableau. Observons d'abord que $|z| = 1$. On remarque ensuite que $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$.

Comme le signe devant la partie imaginaire est négatif et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on en déduit que $\arg z \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Ainsi

$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3).$$

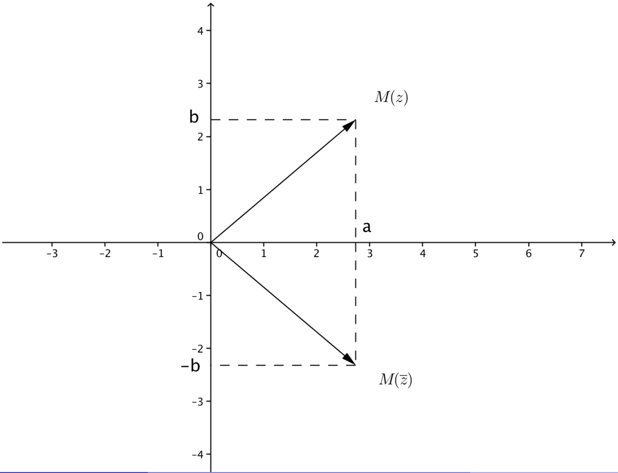
Exercice : Trouvez le module et l'argument des nombres complexes suivants : $-1 - i$ et $-2 - \sqrt{3}i$.

4.1.9 Conjugaison

Pour un nombre $z = a + bi \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on notera son **conjugué** par

$$\overline{z} = a - bi.$$

Géométriquement, cela correspond à une symétrie par rapport à l'axe réel :



Propriétés 4

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, *nous avons*

- $z\overline{z} = |z|^2$,
- $|\overline{z}| = |z|$,
- $\arg \overline{z} \equiv -\arg z$, $z \neq 0$,
- $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$,
- $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
- *pour tout* $z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ *et* $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

Exercice : (1) Trouver les parties réelle et imaginaire et le conjugué de $z = \sqrt{2}(\cos(\frac{1}{4}\pi) + i\sin(\frac{1}{4}\pi))$.

(2) Trouver le conjugé et sa forme algébrique de $(1 - 5i)(2 + i)$.

(3) Soit z un nombre complexe tel que $z^4 = 1$. Trouver le module de z et montrer que $\overline{z} = z^3$.

4.1.10 Opérations Nous avons déjà vu l'addition et la multiplication de deux nombres complexes. Rappelons que si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ alors

- $|zz'| = |z| \times |z'| = \rho\rho'$,
- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$,

$\ll$ On multiplie deux nombres complexes en multipliant les modules et en additionnant les arguments. $\gg$

Inverse

Si $0 \neq z = a + bi \in \mathbb{C}$, alors l'inverse de z s'écrit :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Notons que

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Exercice : Donner la forme algébrique des nombres complexes : $\dfrac{1}{2+3i}$ et $\dfrac{1-4i}{1+i}$.

Voici les propriétés sur le module et l'argument d'un quotient de deux complexes :

Propriétés 5

- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $z \neq 0$,
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$,
- $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$, $z \neq 0$,
- $\arg \frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$, $z \neq 0$, $z' \neq 0$.

Exercice : (1) Soient $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$. Calculer les modules et les arguments de z_1 et z_2.

(2) En déduire le module et l'argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

Conséquence :
Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$, alors

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.}$$

4.2 Notation exponentielle

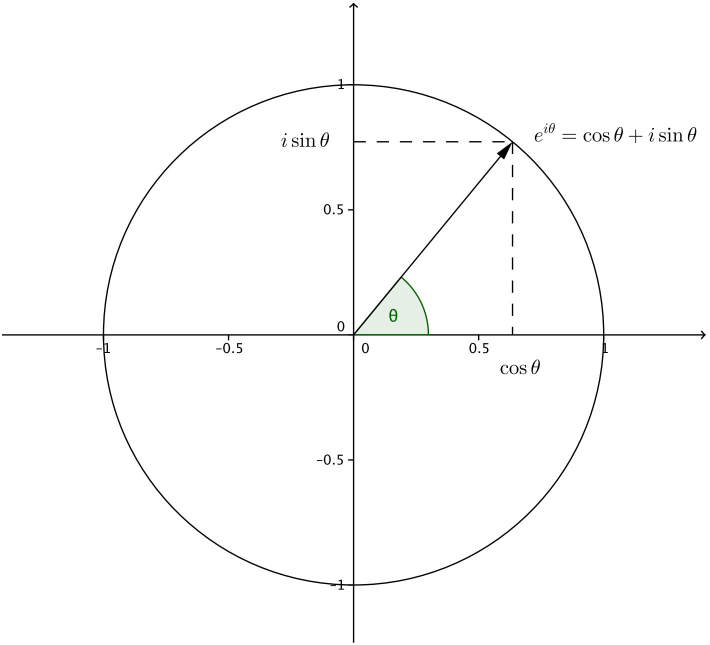
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on écrira (**formule d'Euler**)

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,}$$

qui est un nombre de module 1, donc $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité.

Donc $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Exercice : Donner la forme exponentielle des nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ et $\frac{z_1}{z_2}$.



$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
$i\sin\theta$
$\cos\theta$
θ
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

Notation exponentielle : $\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$, où $\rho = |z|$, $\text{Arg} z = \theta$ $(z \neq 0)$.
On a

$$\begin{cases} \cos\theta = \text{Re}\, e^{i\theta} = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \text{Im}\, e^{i\theta} = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

Alors, d'après ce que nous avons déjà vu sur la multiplication de nombres complexes :

$$\boxed{e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}}.$$

Notons que

$$\boxed{e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}}.$$

Exercice : (1) Calculer $e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(2) Donner sous forme trigonométrique et algébrique des nombres complexes : $(e^{i\frac{\pi}{8}})^2$ et $\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}}$.

On a **la formule de Moivre**

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}.$$

Preuve : Exercice : démontrer la formule de Moivre en effectuant une preuve par récurrence sur n.

Exercice : (1) Ecrire la formule de moivre en utilisant la notation exponetielle.
(2) Calculer $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^9$ et $(e^{\frac{\pi}{3}})^5$.

4.3 Racines d'un nombre complexe. On se donne un complexe w et on cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 = w$.

Proposition 6

Pour tout nombre complexe $w = a + ib$ non nul avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, l'équation $Z^2 = w$ admet deux solutions opposées qui s'écrivent $Z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ avec

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Preuve :

$$(x+iy)^2 = a+ib \iff x^2 - y^2 = a \text{ et } 2xy = b.$$

On peut adjoindre également l'équation $|Z^2| = |w|$ ce qui donne $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. On voit alors qu'il y a exactement deux solutions obtenues en calculant x^2 et y^2 et en comparant les signes de x et y par l'équation $2xy = b$.

Remarque

Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Les solutions de l'équation $Z^2 = w$ sont appelées les **racines carrées** de w. (PAS D'ECRITURE $\sqrt{w}$ POUR CES DEUX SOLUTIONS).

Exercice : Calculer les racines carrées de 1, -2, $1+i$, $8+6I$.
Pour $8+6I$ on cherchera les solutions sous la forme $z = a+ib$.

4.4 Equations polynômiales du second degré

Commençons par quelques rappels du lycée : Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation alors :

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution double $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Notons que lorsque $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Le problème qui nous intéresse maintenant est de trouver z tel que

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0}$$

où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ **sont des complexes donnés**.

On a

$$
\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.
\end{aligned}
$$

Ceci implique la propriété suivante

Proposition 7

Soit $\Delta=b^2-4ac\in\mathbb{C}$.

- *Si $\Delta=0$, l'équation admet une seule solution double $z=-\dfrac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta\neq 0$, notons δ et $-\delta$ ses racines carrées, l'équation admet deux solutions distinctes*

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}.$$

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2+z+1=0$, $z^2-(1+2i)z+i-1=0$ et $z^2-\sqrt{8}z-\frac{3}{2}i=0$.