Estimations des Solutions de l'équation de Bezout dans les Algèbres de Beurling analytiques

O. El-Fallah et M. Zarrabi

Abstract

Let A be a unitary commutative Banach algebra with unit e. For $f \in A$ we denote by $\hat{f}$ the Gelfand transform of f defined on $\hat{A}$, the set of maximal ideals of A. Let $(f_1, ..., f_n) \in A^n$ be such that $\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2 \leq 1$. We study here the existence of solutions $(g_1, ..., g_n) \in A^n$ to the Bezout equation $f_1 g_1 + ... + f_n g_n = e$, whose norm is controlled by a function of n and $\delta = \inf_{\chi \in \hat{A}} \left(|\hat{f}_1(\chi)|^2 + ... + |\hat{f}_n(\chi)|^2 \right)^{1/2}$.

We treat this problem for the analytic Beurling algebras and their quotient by closed ideals. The general Banach algebras with compact Gelfand transform are also considered.

1 Introduction

Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire. L'ensemble des caractères de A, qu'on appellera aussi spectre de A, sera noté $\hat{A}$. La transformée de Gelfand associée à A est l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \quad A &\longrightarrow \mathcal{C}(\hat{A}) \\ f &\longrightarrow \hat{f} \end{aligned}$$

où

$$\hat{f}(\chi) = \chi(f), \quad \chi \in \hat{A},$$

et où $\mathcal{C}(X)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur l'espace topologique X.

Rappelons maintenant les différentes versions quantitatives de la visibilité du spectre introduites dans [**5**] et [**9**]. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\delta \in (0, 1]$, on dit que le spectre de A est $(\delta - n)$–visible ([**5**]) s'il existe une constante $C \in (0, +\infty)$ tel que pour tout $f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in A^n$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} |\hat{f}_i(\chi)|^2 \geq \delta^2 \text{ pour tout } \chi \in \hat{A}, \tag{1}$$

il existe $g=(g_1,g_2,..,g_n)\in A^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = e \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \|g_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C. \tag{2}$$

où e est l'élément unité de A.
On notera alors

$$C_n(\delta,A) = \sup\left\{\inf\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} \|g_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ : \ \sum_{i=1}^{n} f_i g_i = e\right\}\right\},$$

le sup étant pris sur les éléments f de A^n satisfaisant (1). Notons que le spectre de A est $(\delta-n)$–visible pour $\delta\in]0,1]$ si et seulement si $C_n(\delta,A)<+\infty$. Il est clair que si $0<\delta'\leq\delta\leq 1$, alors $C_n(\delta,A)\leq C_n(\delta',A)$. Donc il existe un point critique $\delta_n(A)\in[0,1]$ tel que $C_n(\delta,A)=+\infty$ pour $\delta<\delta_n(A)$ et $C_n(\delta,A)<+\infty$ pour $\delta>\delta_n(A)$. Signalons aussi que $C_n(\delta,A)\leq C_{n+1}(\delta,A)$ pour tout $n\geq 1$.
On dit que le spectre de A est δ–Complétement visible s'il est $(\delta-n)$–visible pour tout $n\geq 1$ et si $\sup\limits_{n\geq 1} C_n(\delta,A)<+\infty$.

On notera dans la suite, $\mathbb{T}$ le cercle unité, $\mathbb{D}$ le disque unité, pour tout $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$, $\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt$ le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f et enfin $A(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphe dans $\mathbb{D}$.
Dans ce travail ω désignera une fonction croissante de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ vérifiant

$$\omega(0)=1,\ \omega(n+m)\leq\omega(n)\omega(m),\quad (n,m\in\mathbb{N}) \ \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\omega(n)^{\frac{1}{n}}=1. \tag{3}$$

L'algèbre de Beurling analytique associée au poids ω est l'espace

$$A_\omega^+ = \{f\in A(\mathbb{D}) \ : \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\hat{f}(n)|\omega(n)<+\infty\},$$

muni du produit ponctuel et de la norme $\|f\|_\omega=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|\hat{f}(n)|\omega(n)$. Ainsi A_ω^+ est une algèbre de Banach commutative unitaire semi-simple. En identifiant son spectre au disque unité fermé, la transformée de Gelfand devient l'identité i.e $\hat{f}=f$ pour tout $f\in A_\omega^+$. Notons que A_ω^+ est isomorphe à l'algèbre de Beurling sur les entiers naturels $\ell_\omega^1=\{(x_n)_{n\geq 0} \ : \ \sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|\omega(n)<+\infty\}$.

La caractérisation des algèbres de Beurling-Sobolev ayant la $(\delta-1)$–visibilité a fait l'objet de plusieurs travaux (voir [**5**], [**9**], [**4**], [**10**] et [**1**]) . Il a été démontré dans [**4**], que $\delta_1(A_\omega^+)=0$ si et seulement si

$$\lim_{p\to+\infty} a(p,\omega)=0 \tag{4}$$

où

$$a(p,\omega) = \lim_{q\to+\infty} a(q,p,\omega)$$

et

$$a(q,p,\omega) = \sup\left\{ \left(\frac{\omega(n_1+n_2+\ \ldots + n_p)}{\omega(n_1)\omega(n_2)..\omega(n_p)} \right)^{\frac{1}{p}} \quad : \quad n_i \geq q \quad (i = 1, 2\ \ldots, p) \right\}.$$

Notons que toute suite croissante ω qui satisfait la condition (4) diverge nécessairement vers l'infini.

Notre objectif dans ce travail est d'étudier la $(\delta - n)$–visibilité pour les algèbres de Beurling analytiques et pour les quotients de ces algèbres. Les deux résultats principaux de ce travail sont:

Théorème A. *Soit ω une suite croissante satisfaisant* (3)*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) Le spectre de A_ω^+ est δ-complétement visible pour tout $\delta \in (0,1]$.

ii) Pour tout $n \geq 1$, le spectre de A_ω^+ est $(\delta - n)$–visible pour tout $\delta \in (0,1]$.

iii) ω satisfait la condition (4)*.*

Théorème B. *Soit ω une suite croissante satisfaisant* (3)*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) ω satisfait la condition (4)*.*

ii) Pour tout idéal fermé I de A_ω^+ et pour tout $\delta \in (0,1]$, le spectre de A_ω^+/I est δ-complétement visible.

Les théorèmes A et B sont démontrés respectivement dans la section 2 et la section 3. Dans la section 4 nous considérons plus généralement les algèbres dont la transformée de Gelfand est compacte.

2 Preuve du Théorème A

Soit ω une suite croissante satisfaisant (3) et soit $\widetilde{\omega}$ le poids symétrique sur $\mathbb{Z}$ associé à ω (i.e $\widetilde{\omega}(n) = \omega(|n|)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$) . L'espace

$$A_{\widetilde{\omega}} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \ : \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|\widetilde{\omega}(n) < +\infty\},$$

muni du produit ponctuel et de la norme $\|f\|_{\widetilde{\omega}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|\widetilde{\omega}(n)$ est une algèbre de Banach commutative unitaire dont l'ensemble des caractères s'identifie au cercle unité $\mathbb{T}$.

Lorsque $\widetilde{\omega}(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on écrira $\|f\|_1$ au lieu de $\|f\|_{\widetilde{\omega}}$. Puisque le poids ω est croissant on a $\delta_1(A_\omega^+) = 0$ si et seulement si $\delta_1(A_{\widetilde{\omega}}) = 0$ ([**4**], Corollaire 5.5).

Dans le Théorème A, l'implication $i) \Rightarrow ii)$ est triviale, l'implication $ii) \Rightarrow iii)$ découle immédiatement de [**4**] et enfin l'implication $iii) \Rightarrow i)$ est une conséquence directe de [**4**] et du résultat suivant.

Théorème 2.1 *Soit ω une suite croissante satisfaisant* (3). *Pour tout $\delta \in (0, 1]$ et tout $n \geq 1$ on a*

$$C_n(\delta, A_\omega^+) \leq 5C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^2.$$

Preuve. Soient $\delta \in (0, 1]$ et $f = (f_1, ..., f_n) \in (A_\omega^+)^n$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\omega^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} |f_i(\zeta)|^2 \geq \delta^2 \text{ pour tout } \ \zeta \in \overline{\mathbb{D}}. \tag{5}$$

Nous allons construire $g = (g_1, .., g_n) \in (A_\omega^+)^n$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \|g_i\|_\omega^2 \leq 25C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^4.$$

Dans un premier temps nous supposons que les f_j, $j = 1, 2, ..., n$, sont holomorphes au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Soient $F = \sum_{j=1}^n |f_j|^2$ et $h_j = \frac{\overline{f_j}}{F}$. Il est clair que les restrictions de F et h_j au cercle unité appartiennent à $A_{\widetilde{\omega}}$ et que $\sum_{j=1}^n f_j h_j = 1$. Comme dans la preuve du théorème de la couronne dans H^∞, nous allons modifier les h_j pour obtenir des solutions holomorphes sur $\mathbb{D}$. Pour cela soit $a_{j,k} = h_j \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} - h_k \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}}$ et

$$b_{j,k}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{a_{j,k}(\zeta)}{\zeta - z} dA(\zeta),$$

où dA est la mesure d'aire. Puisque les h_j, $j = 1, 2, ..., n$, sont C^∞ dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, il est bien connu que $b_{j,k}$ l'est aussi et que $\frac{\partial b_{j,k}}{\partial \bar{z}} = a_{j,k}$ sur $\mathbb{D}$. Soit

$$g_j = h_j \ + \ \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} f_k.$$

Il est alors clair que g_j est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j g_j = 1$. Le reste de la preuve sera consacrée à la majoration de $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \|g_j\|_\omega^2$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \|g_j\|_\omega &= \|h_j \ + \ \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} f_k\|_\omega \\ &\leq \|h_j\|_{\widetilde{\omega}} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} |\widehat{b_{j,k} f_k}(m)| \omega(m), \end{aligned} \tag{6}$$

où $\widehat{b_{j,k}f_k}(m)$ est le $m^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de la restriction de $b_{j,k}f_k$ au cercle unité. D'après (5), $\|F\|_{\widetilde{\omega}} \leq 1$ et $F(\zeta) \geq \delta^2$ pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$. Donc

$$\|h_j\|_{\widetilde{\omega}} \leq \|f_j\|_\omega \|F^{-1}\|_{\widetilde{\omega}} \leq \|f_j\|_\omega C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}}). \tag{7}$$

Notons aussi que

$$\begin{aligned}\widehat{b_{j,k}}(m) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_{j,k}(e^{it})e^{-imt}dt \\ &= -\tfrac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} a_{j,k}(\zeta)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-imt}}{\zeta - e^{it}}dt\right)dA(\zeta).\end{aligned}$$

Donc pour $m \geq 0$, $\widehat{b_{j,k}}(m) = 0$ et pour $m \leq -1$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{b_{j,k}}(m) &= \tfrac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} a_{j,k}(\zeta)\zeta^{-m-1}dA(\zeta) \\ &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} a_{j,k}(re^{it})r^{-m-1}e^{-i(m+1)}rdrdt \\ &= 2\int_0^1 \widehat{a_{j,k}^{(r)}}(m+1)r^{-m}dr.\end{aligned}$$

Ici, lorsqu' une fonction g est définie sur $\overline{\mathbb{D}}$, on note $g^{(r)}(z) = g(rz)$ pour $z \in \overline{\mathbb{D}}$ et $0 \leq r < 1$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}|\widehat{b_{j,k}f_k}(m)|\omega(m) &= \sum_{m=0}^{\infty}|\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{b_{j,k}}(-l)\hat{f}_k(m+l)\omega(m)| \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty}|\widehat{b_{j,k}}(-l)|\sum_{m=0}^{\infty}|\hat{f}_k(m+l)|\omega(m+l) \\ &\leq \|f_k\|_\omega \sum_{l=0}^{\infty}|\widehat{b_{j,k}}(-l)| \\ &\leq 2\|f_k\|_\omega \sum_{l=0}^{\infty}\int_0^1 |\widehat{a_{j,k}^{(r)}}(1-l)|r^l dr \\ &\leq 2\|f_k\|_\omega \int_0^1 \|a_{j,k}^{(r)}\|_1 dr.\end{aligned} \tag{8}$$

Des calculs bien connus montrent que $a_{j,k} = \left(\overline{f_j'}\,\overline{f_k} - \overline{f_j}\,\overline{f_k'}\right)F^{-2}$. Par conséquent on a

$$\begin{aligned}\|a_{j,k}^{(r)}\|_1 &= \|\tfrac{1}{F^{2(r)}}\left(\overline{f_j'^{(r)}f_k^{(r)}} - \overline{f_j^{(r)}f_k'^{(r)}}\right)\|_1 \\ &\leq \|\tfrac{1}{F^{(r)}}\|_1^2\left(\|f_j'^{(r)}\|_1\|f_k^{(r)}\|_1 + \|f_j^{(r)}\|_1\|f_k'^{(r)}\|_1\right) \\ &\leq C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^2(\|f_j'^{(r)}\|_1\|f_k\|_\omega + \|f_j\|_\omega\|f_k'^{(r)}\|_1).\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \|a_{j,k}^r\|_1 dr \leq C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^2\left(\|f_k\|_\omega\int_0^1\|f_j'^{(r)}\|_1 dr + \|f_j\|_\omega\int_0^1\|f_k'^{(r)}\|_1 dr\right).$$

Or pour tout $l = 1, 2, ..., n$, on a

$$\int_0^1 \|f_l'^{(r)}\|_1 dr = \int_0^1 \sum_{m\geq 1} m|\hat{f}_l(m)|r^{m-1}dr = \sum_{m\geq 1} |\hat{f}_l(m)| \leq \|f_l\|_\omega.$$

Ce qui donne

$$\int_0^1 \|a_{j,k}^{(r)}\|_1 dr \leq 2C_1(\delta^2, A_{\tilde{\omega}})^2 \|f_j\|_\omega \|f_k\|_\omega. \tag{9}$$

En combinant les inégalités (5), (6), (7), (8) et (9), on obtient

$$\|g_j\|_\omega \leq \|f_j\|_\omega C_1(\delta^2, A_{\tilde{\omega}}) + 4\|f_j\|_\omega C_1(\delta^2, A_{\tilde{\omega}})^2 \leq 5\|f_j\|_\omega C_1(\delta^2, A_{\tilde{\omega}})^2.$$

D'où $\left(\sum_{j=1}^n \|g_j\|_\omega^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 5C_1(\delta^2, A_{\tilde{\omega}})^2.$

Dans le cas où les f_j ne sont pas holomorphes dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$ on considère pour $0 < r < 1$, les $f_j^{(r)}$ qui vérifient aussi la condition (5). D'après ce qui précède, il existe $g_r = (g_{r,1}, . . , g_{r,n}) \in (A_\omega^+)^n$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^n f_i^{(r)} g_{r,i} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \|g_{r,i}\|_\omega^2 \leq 25C_1(\delta^2, A_{\tilde{\omega}})^4.$$

Comme A_ω^+ admet un prédual (A_ω^+ peut être identifié au dual de $c_0(1/\omega) = \{(u_n)_{n\geq 0} : \sup_{n\geq 0} |u_n|/\omega(n) < \infty\}$), d'après le théorème de Banach–Alaoglu, la boule unité fermée B_ω de A_ω^+ est compacte pour la topologie faible-*. Comme de plus $c_0(1/\omega)$ est séparable, B_ω est metrisable pour la topologie faible-*. Il existe alors une suite croissante (r_k) tendant vers 1 et $g = (g_1, . . , g_n) \in (A_\omega^+)^n$ tel que pour $1 \leq i \leq n$, $(g_{r_k,i})_k$ converge faiblement vers g_i. Comme la convergence faible entraine la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{D}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n f_i g_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \|g_i\|_\omega^2 \leq 25C_1(\delta^2, A_{\tilde{\omega}})^4.$$

3 Preuve du Théorème B

Si $f \in A(\mathbb{D})$, on notera $Z(f) = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : f(z) = 0\}$ et si $M \subset A(\mathbb{D})$, on notera $Z(M) = \cap_{f\in M} Z(f)$. Pour tout fermé $E \subset \overline{\mathbb{D}}$ on posera $E_\delta = \{\zeta \in \overline{\mathbb{D}} : d(\zeta, E) \leq \delta\}$, où $d(\zeta, E)$ désigne la distance de ζ à E.

Pour la preuve du résultat principal de cette section nous aurons besoin des deux lemmes élémentaires suivants.

Lemme 3.1 *Soit I un idéal fermé de A_ω^+ où ω est un poids satisfaisant* (3) *et soit $E = Z(I)$. Pour tout $\delta > 0$, il existe $f \in I$ tel que pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus E_\delta$, $f(z) \neq 0$.*

Preuve. Soit I un idéal fermé de A_ω^+ tel que $Z(I) = E$. La fermeture J de I dans $A(\mathbb{D})$ est un idéal fermé tel que $Z(J) = E$. D'après la caractérisation des idéaux fermés de $A(\mathbb{D})$ ([**6**]), il existe $g \in J$ tel que $Z(g) = E$. En approchant g par les éléments de I on obtient le résultat.

On note alors

$$\varrho_I(\delta) = \sup\{\inf\{|f(z)| \ : \ z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus E_\delta\}\},$$

le sup étant pris sur les $f \in I$ tels que $\|f\|_\omega \leq 1$. La conclusion du lemme 3.1 se traduit alors par $\varrho_I(\delta) > 0$ pour tout $\delta > 0$.
Pour toute suite $(\omega(n))_{n\geq 0}$, on notera par ω_* la fonction réciproque définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\omega_*(t) = \inf\{n \geq 1 \ : \ \omega(n) \geq t\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

Lemme 3.2 *Soit ω une suite croissante satisfaisant* (3)*, alors pour tout $z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ tels que $|z - \zeta| \leq \frac{\delta}{\omega_*(2/\delta)}$ on a $|f(z) - f(\zeta)| \leq \delta \|f\|_\omega$ pour tout $f \in A_\omega^+$.*

Preuve. Soit $f \in A_\omega^+$ et soit $z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ on a:

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq \sum_{n\geq 1} |\hat{f}(n)||z^n - \zeta^n| \leq \sup_{n\geq 1} \frac{|z^n - \zeta^n|}{\omega(n)} \|f\|_\omega$$

D'une part si $n \geq \omega_*(2/\delta)$ alors $\frac{|z^n - \zeta^n|}{\omega(n)} \leq \frac{2}{\omega(\omega_*(2/\delta))} \leq \delta$. D'autre part si $n \leq \omega_*(2/\delta)$ alors $\frac{|z^n - \zeta^n|}{\omega(n)} \leq |z - \zeta| n \leq |z - \zeta| \omega_*(2/\delta) \leq \delta$ dès que $|z - \zeta| \leq \frac{\delta}{\omega_*(2/\delta)}$. On a donc bien $\sup_{n\geq 1} \dfrac{|z^n - \zeta^n|}{\omega(n)} \leq \delta$ pour $|z - \zeta| \leq \frac{\delta}{\omega_*(2/\delta)}$.

Pour démontrer l'impliction $ii) \Rightarrow i)$ dans le théorème B, il suffit de prendre $I = \{0\}$ et d'utiliser ensuite le Théorème A. Quand à l'implication $i) \Rightarrow ii)$ elle découle du résultat suivant. On rappelle que pour les suites ω croissantes, la condition $i)$ dans le théorème B entraine que ω diverge vers l'infini, ce qui assure que $\omega_*(t)$ est fini pour tout t.

Théorème 3.3 *Soit ω une suite croissante satisfaisant* (3) *et soit I un idéal fermé de A_ω^+ alors*

$$C_n(\delta, A_\omega^+/I) \ \leq \ \frac{5}{\sqrt{2}} C_1(M_I(\delta)^2, A_{\tilde{\omega}})^2,$$

où $M_I(\delta) = Min\left(\frac{1}{4}\varrho_I\left(\frac{\delta^2}{4\omega_*(8/\delta^2)}\right), \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right)$

Preuve. Soit $\delta \in]0, 1]$ et soit $f = (f_1, f_2, ..., f_n) \in (A_\omega^+)^n$ satisfaisant

$$\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_\omega^2 \leq 3/2, \quad \sum_{j=1}^{n} |f_j(\zeta)|^2 \geq \delta^2 \text{ pour tout } \ \zeta \in E := Z(I).$$

Soit $\delta' = \frac{\delta^2}{4\omega_*(8/\delta^2)}$. D'après le lemme 3.2, si $|z-\zeta| \leq \delta'$, alors $|f_j(z)-f_j(\zeta)| \leq (\delta^2/4)\|f_j\|_\omega$. Donc pour tout $\zeta \in E_{\delta'}$ il existe $z \in E$ tel que $|\zeta - z| \leq \delta'$ et par conséquent

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |f_j(\zeta)|^2 &= \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|^2 - \sum_{j=1}^{n}(|f_j(z)|^2 - |f_j(\zeta)|^2) \\
&\geq \delta^2 - \sum_{j=1}^{n} |f_j(z) - f_j(\zeta)||f_j(z) + f_j(\zeta)| \\
&\geq \delta^2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta^2}{4}(2\|f_j\|_\omega^2) \\
&\geq \delta^2/4.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1, il existe $h \in I$ tel que $\|h\|_\omega = 1$ et $|h(z)| \geq \varrho_I(\delta')/2$ pour tout $z \in \mathbb{T} \setminus E_{\delta'}$. On pose alors pour $j = 1, 2, .., n$, $h_j = \frac{1}{\sqrt{2}} f_j$ et $h_{n+1} = \frac{1}{2}h$. Il est alors clair que $\sum_{j=1}^{n+1} \|h_j\|_\omega^2 \leq 1$ et que $\sum_{j=1}^{n+1} |h_j(z)|^2 \geq M_I(\delta)^2$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$. D'après le théorème 2.1, il existe $g_1, g_2, .., g_{n+1} \in A_\omega^+$ tels que $\sum_{j=1}^{n+1} h_j g_j = 1$ et $\sum_{j=1}^{n+1} \|g_j\|^2 \leq 25C_1(M_I(\delta)^2, A_{\tilde{\omega}})^4$. Finalement pour $k_j = (1/\sqrt{2})g_j$, $j = 1, 2, .., n$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \pi(f_j)\pi(k_j) = \pi(1) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} \|k_j\|^2 \leq (25/2)C_1(M_I(\delta)^2, A_{\tilde{\omega}})^4,$$

où π est la surjection canonique de A_ω^+ dans A_ω^+/I, ce qui achève la preuve.

Remarque : Soit $p \geq 1$ et $\omega = (\omega_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante telle que $\omega(0) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \omega(n)^{\frac{1}{n}} = 1$. On pose

$$A_{\omega,p}^+ = \left\{ f \in A(\mathbb{D}) \ : \ \|f\|_{\omega,p} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\hat{f}(n)|^p \omega(n)^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Si on suppose que $A_{\omega,p}^+$ est une algèbre topologique i.e il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|fg\|_{\omega,p} \leq C\|f\|_{\omega,p}\|g\|_{\omega,p}, \ (f, g \in A_{\omega,p}^+),$$

alors les conclusions des théorèmes A et B sont vraies pour $A_{\omega,p}^+$.

4 Exemples et Remarques

Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire et soit I est un idéal fermé de A. L'ensemble des caractères de l'algèbre quotient A/I s'identifie à l'ensemble $Z(I) = \{\chi \in \hat{A}\ :\ \hat{f}(\chi) = 0,\ \chi \in I\ \}$ ([**3**]). On a le résultat suivant.

Théorème 4.1 *Supposons que la transformée de Gelfand de A soit compacte. Alors pour tout $\delta \in (0,1]$, il existe une constante $M(\delta) \in (0,1]$ telle que*
i) Pour tout entier $n \geq 1$, il existe un entier $m \geq 1$ tel que

$$C_n(\delta, A/I) \leq C_m(M(\delta), A).$$

En particulier si le spectre de A est δ–complètement visible pour tout $\delta \in (0,1]$, alors il en est de même pour le spectre de A/I.
ii) Si de plus I satisfait la condition suivante : Pour tout voisinage V de $Z(I)$,

$$\textit{il existe } f \in I \quad \textit{tel que } \hat{f}(\chi) \neq 0 \textit{ pour tout } \chi \notin V, \tag{10}$$

alors

$$C_n(\delta, A/I) \leq C_{n+1}(M(\delta), A).$$

En particulier $\delta_{n+1}(A) = 0 \Longrightarrow \delta_n(A/I) = 0$.

La preuve de ce théorème utilise le théorème de Arzèla-Ascoli et des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du théorème 3.3. Nous l'omittons ici.

On dira que A est symétrique s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in A$ on peut trouver $f^\star \in A$ tel que $\|f^\star\| \leq c\|f\|$ et $\hat{f^\star}(\chi) = \overline{\hat{f}(\chi)}$, $\chi \in \hat{A}$. Si A est symétrique et si $(f_1, ..., f_n) \in A^n$ satisfait la condition (1) alors on a $\sum_{i=1}^n f_i g_i = e$, où $g_i = f_i^\star \left(\sum_{i=1}^n f_i f_i^\star\right)^{-1}$, $1 \leq i \leq n$. Ceci montre que $C_n(\delta, A) \leq C_1(\delta^2/c, A)$, $n \geq 1$. Ainsi si le spectre de A est $(\frac{\delta^2}{c} - 1)$–visible alors il est δ–complètement visible (voir aussi [**9**]).

D'autre part il est facile de voir que tout idéal fermé d'une algèbre symétrique satisfait la condition (10). Il découle alors de ces observations et du théorème 4.1 que si A est symétrique et si sa transformée de Gelfand est compacte alors

$$\delta_{n+1}(A) = 0 \Longrightarrow \delta_n(A/I) = 0.$$

Considérons maintenant une algèbre A telle que $\mathcal{G}(A)$, l'image de A par sa transformée de Gelfand $\mathcal{G}$, est dense dans $\mathcal{C}(\hat{A})$, pour la norme de la convergence uniforme sur $\hat{A}$. Nous clamons que si I est un idéal fermé de A alors il satisfait la condition (10). En effet, soit J la fermeture de $\mathcal{G}(I)$ dans $\mathcal{C}(\hat{A})$, alors J est un idéal fermé et $Z(J) = Z(I)$. Soit V un voisinage de $Z(I)$ et soit $\varphi \in \mathcal{C}(\hat{A})$ une fonction égale à 1 sur $Z(I)$ et dont le support est contenu dans V. Alors d'après la structure des idéaux fermés de $\mathcal{C}(\hat{A})$ (voir [**2**], Theorem 4.1.3), la fonction $1-\varphi$ est dans J et en l'approchant par des fonctions de $\mathcal{G}(I)$ on voit que I satisfait la condition (10).

Enfin nous signalons que la condition (10) n'est pas toujours satisfaite comme le montre l'exemple suivant :

Soit $A(\mathbb{D}^2) = \{f \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{D}^2}) : \ f$ holomorphe sur $\mathbb{D}^2\}$, l'algèbre du bidisque. Muni du produit ponctuel et de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}^2} |f(z)|$, $A(\mathbb{D}^2)$ est une algèbre de Banach commutative et unitaire. Son spectre peut être identifié à $\overline{\mathbb{D}^2}$. Soit $K \subset \mathbb{D}^2$ un compact et soit $I(K)$ l'idéal fermé de $A(\mathbb{D}^2)$ définit par $I(K) = \{f \in A(\mathbb{D}^2) : f_{|K} \equiv 0\}$. On peut vérifier aisément, grâce au théorème de Hartogs, que $I(K)$ ne vérifie pas (10).

Dans la suite nous allons considérer deux exemples d'algèbres de Banach dans les transformées de Gelfand ne sont pas compactes.

1) Rappelons qu'on note par $A(\mathbb{D})$ l'algèbre du disque. Il est bien clair que $\delta_1(A(\mathbb{D})) = 0$ et que pour tout $\delta \in (0,1]$, $C_1(\delta, A(\mathbb{D})) = 1/\delta$. La proposition suivante montre, en particulier, qu'il existe des idéaux fermés I de $A(\mathbb{D})$ tel que $\delta_1(A(\mathbb{D})/I) = 1$.

Proposition 4.2 *Soit I un idéal fermé de $A(\mathbb{D})$ tel que $Z(I) \subset \mathbb{T}$.*
(i) Si $I = \{f \in A(\mathbb{D}) \ : \ f(z) = 0 \ (z \in Z(I))\}$, alors pour tout $n \geq 1$, $\delta_n(A(\mathbb{D})/I) = 0$.
(ii) Si $I \neq \{f \in A(\mathbb{D}) \ : \ f(z) = 0 \ (z \in Z(I))\}$, alors pour tout $n \geq 1$, $\delta_n(A(\mathbb{D})/I) = 1$.

Preuve. Posons $E = Z(I)$ et supposons que $I = \{f \in A(\mathbb{D}) \ : \ f(z) = 0 \ (z \in E)\}$. Notons que E est de mesure de Lebesgue nulle. D'après le théorème de Rudin-Bishop, toute fonction continue sur E est la restiction à E d'une fonction dans $A(\mathbb{D})$ ([**6**]). En fait l'injection $f + I \to f_{|E}$ est une isométrie bijective de $A(\mathbb{D})/I$ dans $\mathcal{C}(E)$. On a alors $C_n(\delta, A(\mathbb{D})/I) = C_n(\delta, \mathcal{C}(E)) = 1/\delta, \ n \geq 1, \ 0 \leq \delta < 1$. Ainsi la partie i) de la proposition est bien vérifiée.

Soient π la surjection canonique de $A(\mathbb{D})$ dans $A(\mathbb{D})/I$, $u \ : \ z \to z$ la fonction identité et $f_n = u^n, \ n \geq 1$. Supposons qu' il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\pi(f_n)^{-1}\|_\infty \leq C, \ n \geq 1$. Pour tout polynôme trignômétrique $p(e^{it}) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$, on a

$$\begin{aligned}\|p(\pi(u))\|_\infty &= \|\pi(u)^{-N}\sum_{n=-N}^{N} a_n\pi(u)^{n+N}\|_\infty \\ &\leq \|\pi(u)^{-N}\|_\infty\|\sum_{n=-N}^{N} a_n\pi(u)^{n+N}\|_\infty \\ &\leq C\|\sum_{n=-N}^{N} a_n u^{n+N}\|_\infty \\ &\leq C\|p\|_\infty.\end{aligned}$$

Donc il existe un morphisme continu Φ de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dans $A(\mathbb{D})/I$ prolongeant π. Le noyau KerΦ est un ideal fermé de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ qui verifie Ker$\Phi \cap A(\mathbb{D}) = I$. Donc $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})\ :\ f(z) = 0\ (z \in E)\} \subset$ KerΦ. D'où $I = \{f \in A(\mathbb{D})\ :\ f(z) = 0\ (z \in E)\}$.

Supposons maintenant que $I \neq \{f \in A(\mathbb{D})\ :\ f(z) = 0\ (z \in E)\}$. D'après ce qui précède on a $\sup_n \|f_n\|_\infty = +\infty$. Puisque pour tout n, $\|f_n\|_\infty = 1$ et $|f_n(z)| = 1,\ (z \in E)$, on obtient que $\delta_1(A(\mathbb{D})/I) = 1$. Comme $\delta_n(A(\mathbb{D})/I) \geq \delta_1(A(\mathbb{D})/I),\ n \geq 1$, on voit que la partie *ii)* de la proposition est satisfaite.

2) Considérons maintenant l'algèbre de Wiener analytique

$$A^+ = \{f \in A(\mathbb{D})\ :\ \|f\|_1 = \sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)| < +\infty\}.$$

Il est montré dans [**5**] (voir aussi [**9**]) que $\delta_1(A^+) = \frac{1}{2}$, $C_1(\delta, A^+) = \frac{1}{1-2\delta}$ pour $\frac{1}{2} < \delta \leq 1$ et $C_1(\delta, A^+) = +\infty$ pour $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$.

Pour un fermé non vide de $\mathbb{T}$, on pose $I_E = \{f \in A^+\ :\ f(z) = 0,\ (z \in E)\}$. On supposera que E est de type ZA^+ i.e $I_E \neq \{0\}$. Contrairement à ce qui se passe dans la proposition 4.2, les constantes $\delta_n(A^+/I_E)$ dépendent de E. En effet si E est un ensemble de Helson (voir [**7**] pour la définition) alors d'après le résultat de Wik [**12**], on a $A^+(E) = C(E)$, où $A^+(E)$ désigne l'algèbre des restrictions des fonctions de A^+ à E. Dans ce cas on a $\delta_n(A^+/I_E) = 0,\ n \geq 1$. D'autre part si E n'est pas de type AA^+ (voir [**8**]) alors on a $\|\pi(u^n)\| = 1$ pour $n \geq 1$, $|u^n(z)| = 1$ pour $z \in E$ et $\lim_{n\to+\infty} \|\pi(u)^{-n}\| = +\infty$, où π est la surjection canonique de A^+ dans A^+/I_E et u la fonction identité $z \to z$. On voit alors que dans ce cas on a $\delta_1(A^+/I_E) = 1$ et par conséquent $\delta_n(A^+/I_E) = 1,\ n \geq 1$.

References

[**1**] A. Aleman and A. Dahlner, *Uniform Spectral Radius and Compact Gelfand Transforms*, Préprint.

[**2**] B. Aupetit, *A primer on spectral theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] F. F. Bonsal and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Springer verlag. New-york, 1958.

[4] O. El-Fallah and A. Ezzaaraoui, *Majorations uniformes de normes d'inverses dans les Algèbres de Beurling*, J. London Math. Soc. (2), 65 (2002), 705-719.

[5] O. El-Fallah, N.K. Nikol'skii and M. Zarrabi, *Resolvant estimates in Beurling-Sobolev algebras*, St Petersbourg Math. J. 10, no 6 (1999), 901–964.

[6] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1962.

[7] J.P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

[8] J.P. Kahane, Y. Katznelson, *Sur les algèbres de restrictions des séries de Taylor absolument convergentes à un fermé du cercle*, J. Analyse Maths. 23 (1970), 185–197.

[9] N.K. Nikolskii, *In search of the invisible spectrum*, Annales Inst. Fourier, 49, (1999), 1925-1998.

[10] N.K. Nikolskii, *The phenomenon of the invisible spectrum and the problem of efficient inversions*, Proc. Conference "Harmonic Analysis in 20th century", ed. J. Byrnes.

[11] V.A. Tolokonnikov, *The corona theorem in algebras of bounded analytic functions*, Am. Math. Soc.Transl., Ser. 2, 149 (1991), 61-95.

[12] I. Wik, *On linear dependence in closed sets* , Ark. Math., 4 (1961) 209–218.

O. El–Fallah
Univerité Mohamed V
Département de Mathématiques et informatique
Avenue Ibn Battouta
BP 1014, Rabat, MAROC. Email : elfallah@fsr.ac.ma

M. Zarrabi
Université Bordeaux I
Laboratoire de Mathématiques pures
UMR 5467
351, cours de la Libération

33405 Talence cedex, FRANCE.
Email : zarrabi@math.u-bordeaux.fr