

MÉMOIRE
présenté pour obtenir
L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
de
L'UNIVERSITÉ de BORDEAUX

par
Duc-Manh NGUYEN

soutenu le 7 Juin 2016 devant le jury composé de

| | | |
|------------------------|------------------------|----------------------------|
| M. Christophe BAVARD | Professeur | Université de Bordeaux |
| M. Pascal HUBERT | Professeur | Université d'Aix-Marseille |
| M. Erwan LANNEAU | Professeur | Université Grenoble-Alpes |
| M. Jean-François QUINT | Directeur de Recherche | CNRS-IMB Bordeaux |
| M. Anton ZORITCH | Professeur | Université Paris VII |

sur les avis de

| | | |
|-----------------------|------------|----------------------------|
| Mme Ursula HAMENSTÄDT | Professeur | Université de Bonn |
| M. Pascal HUBERT | Professeur | Université d'Aix-Marseille |
| M. Anton ZORITCH | Professeur | Université Paris VII |

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier tout d'abord les rapporteurs et les membres du jury, malgré leur emploi du temps surchargé, d'avoir pris du temps pour examiner mes travaux. De plus, les interventions de plusieurs d'entre eux ont été précieuses aux moments clés de mon parcours, je leur en suis très reconnaissant.

Je remercie mes co-auteurs, David Aulicino, Vincent Koziarz, Erwan Lanneau, et Alex Wright, d'avoir partagé avec moi les moments de frustration, mais aussi la joie intense de la découverte. Même si les collaborations ne sont pas toutes aisées, l'expérience reste toujours enrichissante pour moi, tant sur le plan professionnel que personnel.

Je remercie mes collègues de l'IMB, en particulier ceux de l'équipe Géométrie, pour leur amitié, leur gentillesse, et leur sens de l'humour (même potache). Mes activités de recherche ont certainement bénéficié de cette excellente ambiance amicale et bon enfant au sein de l'équipe.

Je voudrais aussi remercier François Labourie, mon ancien directeur de thèse, dont les conseils et le soutien ont été d'une grande aide tout au long de mon parcours. Je regrette qu'il n'ait pu être présent à ma soutenance.

Un grand merci aux amis de la petite communauté vietnamienne à Bordeaux, qui m'ont aidé à surmonter bien de difficultés dans la vie hors du labo.

Et enfin, je remercie ma femme chérie, celle qui m'apporte de la joie, du bonheur, et un soutien indéfectible.

AVANT-PROPOS

Depuis la thèse, mes activités de recherche évoluent autour des surfaces plates et leur espace de modules. La plupart de mes travaux peuvent être classés en deux thèmes principaux : la classification des $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites dans l'espace des surfaces de translation, et le volume de l'espace de surfaces plates en général, en particulier en genre 0.

Les surfaces de translation se trouvent au cœur de plusieurs thématiques en géométrie, topologie et dynamique. L'un des problèmes les plus importants dans cette théorie est la classification des adhérences d'orbites par l'action du groupe $GL^+(2, \mathbb{R})$. Les résultats fondateurs de Masur et Veech dans les années 80, et les travaux révolutionnaires récents d'Eskin-Mirzakhani-Mohammadi ont donné des réponses globales à ce problème. Les résultats de mes travaux dans cette direction contribuent aux classifications *effectives* des $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites en genre 3 et 4. Une partie de ces résultats prolongent des résultats de McMullen en genre 2.

Depuis les travaux de Deligne-Mostow et Thurston, les surfaces plates de genre zéro ont fait l'objet d'intenses investigations notamment liées aux constructions des réseaux hyperboliques complexes. Grâce à ces surfaces plates, Thurston a construit de différentes compactifications de l'espace de modules $\mathcal{M}_{0,n}$. La question naturelle d'évaluer le volume de ces compactifications est restée pendant long temps ouverte. Tout récemment, McMullen a obtenu une formule pour calculer ces volumes.

Le volume des espaces de surfaces plates a été l'une des questions principales de ma thèse, dans laquelle j'ai pu montré des résultats de finitude pour des espaces de surfaces plates qui englobent ceux de Thurston. Dans une collaboration récente avec V. Koziarz, par une méthode complètement différente de celle de McMullen, nous avons obtenu des formules alternatives pour le calcul du volume des compactifications de Thurston.

L'objectif de ce mémoire est de faire la synthèse de mes résultats et de les mettre dans leur contexte. Il n'y aura donc pas beaucoup de détails de preuves, seuls quelques brefs descriptifs des techniques qui entrent en jeu sont donnés. Les lecteurs intéressés sont invités à poursuivre l'exploration en consultant mes articles de recherche.

Liste des travaux de l'auteur

Thèse doctorat :

Espaces de modules de surfaces plate et leur forme volume, **Université Paris-Sud XI** (2008), 1–162.

Articles issus de la thèse :

1. D.-M. Nguyen : *Triangulation and volume forms on moduli spaces of flat surfaces*, **Geometric and Functional Analysis** **20** (2010), No.1, 192-228.
2. D.-M. Nguyen : *Energy functions on moduli space of flat surfaces with erasing forest*, **Mathematische Annalen** **353** (2012), No.3, 997-1036.

Articles publiés ou acceptés :

3. D.-M. Nguyen : *Parallelogram decompositions and generic surfaces in $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$* , **Geometry & Topology** **15** (2011), 1707-1747.
4. D.-M. Nguyen : *On the topology of $\mathcal{H}(2)$* , **Groups, Geometry, and Dynamics** **8** (2014), 513-551.
5. E. Lanneau et D.-M. Nguyen : *Teichmüller curves generated by Prym eigenforms in genus three and genus four*, **Journal of Topology** **7 (2)** (2014), 475-522.
6. D.-M. Nguyen et A. Wright : *Non-Veech surfaces in $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ are generic*, **Geometric and Functional Analysis** **24** (2014), 1316-1335.
7. E. Lanneau et D.M. Nguyen : *Complete periodicity of Prym eigenforms*, **Annales Scientifiques de l'E.N.S.**, **49** (2016), no. 1, 87–130.
8. D. Aulicino, D.M. Nguyen et A. Wright : *Classification of higher rank orbit closures in $\mathcal{H}^{\text{odd}}(4)$* , 23 pages, à paraître dans **Journal of the European Mathematical Society (JEMS)** (arXiv :1308.5879).
9. E. Lanneau et D.-M. Nguyen : *$\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -orbit closures in Prym eigenform loci*, 48 pages, à paraître dans **Geometry & Topology** (arXiv :1310.8537).
10. D. Aulicino et D.-M. Nguyen : *Rank two affine submanifolds in $\mathcal{H}(2, 2)$ and $\mathcal{H}(3, 1)$* , 63 pages, à paraître dans **Geometry & Topology**. (arXiv :1501.03303).

Prépublications :

11. D.-M. Nguyen : *Volumes of the sets of translation surfaces with small saddle connections* (arXiv : 1211.7314).
12. E. Lanneau et D.-M. Nguyen : *Components of Prym eigenform loci in genus three* (arXiv :1408.1064).
13. E. Lanneau, D.-M. Nguyen, et A. Wright : *Finiteness of Teichmüller curves in non-arithmetic rank one orbit closures* (arXiv :1504.03742).
14. D.-M. Nguyen : *Translation surfaces and the curve graph in genus two* (arXiv :1506.05966)
15. V.Koziazar et D.-M. Nguyen : *Complex hyperbolic volume and intersections of boundary divisors in moduli spaces of genus zero curves* (arXiv :1601.05252).

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----|
| Remerciements | |
| Avant-propos | |
| 1. Introduction | 2 |
| 1.1. Généralités sur les surfaces plates | 2 |
| 1.2. Espaces de modules de surfaces de translation | 4 |
| 1.3. Action de $GL^+(2, \mathbb{R})$ | 6 |
| 2. Sous-variétés affines | 9 |
| 2.1. Travaux d'Eskin-Mirzakhani-Mohammadi | 9 |
| 2.2. Déformations cylindriques dans une adhérence d'orbite | 12 |
| 3. Classification en genre 2 | 15 |
| 4. Variétés Prym et formes propres en genre 3,4,5 | 18 |
| 4.1. Classification des $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites dans les lieux $\Omega E_D(2g - 2)$ | 19 |
| 4.2. Classifications dans les lieux formes propres de dimension 3 | 20 |
| 4.3. Caractérisations géométrique et dynamique des formes propres Prym | 22 |
| 4.4. Groupes de Veech des formes propres | 25 |
| 5. Sous-variétés affines de rang deux en genre 3 | 26 |
| 5.1. Surfaces génériques dans la composante hyperelliptique $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ | 26 |
| 5.2. Classification des sous-variétés affines de rang 2 | 27 |
| 6. Surfaces plates de genre zéro | 29 |
| 6.1. Systèmes locaux et métriques hyperboliques sur $\mathfrak{M}_{0,n}$ | 29 |
| 6.2. Complétion métrique de $\mathfrak{M}_{0,n}$ et variétés coniques | 32 |
| 6.3. Calculs du volume | 33 |
| Références | 39 |

1. INTRODUCTION

Dans cette introduction, nous allons rappeler quelques notions de base qui sont des objets centraux de nos discussions par la suite. La présentation est volontairement informelle, nous renvoyons les lecteurs intéressés, désireux d'avoir plus de détails aux excellents survols de Masur-Tabachnikov[64], et de Zorich [104].

1.1. Généralités sur les surfaces plates. Mes activités de recherche évoluent autour du thème des surfaces plates, en particulier des surfaces de translation, et leur espace de modules. Les *surfaces plates à singularités coniques* ou plus simplement *surfaces plates*, sont des surfaces compactes, munies d'une métrique plate en dehors d'un ensemble fini dont chaque point possède un voisinage isométrique à un cône euclidien. Les *surfaces de translation* sont des surfaces plates particulières, elles vérifient une condition supplémentaire : l'holonomie de toute courbe fermée est une translation de \mathbb{R}^2 , autrement-dit la partie linéaire de l'holonomie est toujours triviale. Dans la littérature, nous avons aussi la notion de surfaces plates infinies (non-compactes) qui fait l'objet de nombreux travaux intéressants récents. En raison de la connaissance très limitée de l'auteur sur ces travaux, dans le cadre de mémoire, nous allons nous concentrer uniquement sur les métriques plates définies sur des surfaces compactes sans bord, avec un nombre fini de singularités coniques.

Les premiers exemples de surfaces plates sont des tores plats, ce sont des objets qu'on obtient lorsqu'on recolle les côtés opposés d'un carré (ou plus généralement, d'un parallélogramme). Comme les « recollements » sont réalisés par des isométries euclidiennes, la surface ainsi obtenue possède une métrique plate provenant de la métrique du plan (en restriction au carré d'origine). Notons que les tores plats ne contiennent aucune singularité conique, et sont des exemples de surfaces de translation, les holonomies des courbes fermées sont des éléments d'un certain réseau de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ isomorphe à \mathbb{Z}^2 .

On a également des exemples naturels qui proviennent des polyèdres euclidiens de \mathbb{R}^3 , si on munit chaque face du polyèdre de la métrique induite de \mathbb{R}^3 , on aura alors une métrique plate sur la sphère dont les singularités sont les sommets du polyèdre (les points à l'intérieur des côtés ne sont pas des points singuliers car ils possèdent chacun un voisinage qui est la réunion de deux demi-disques). À titre d'exemple, la surface du cube nous donne une surface plate avec 8 points singuliers d'angle $3\pi/4$.

A chaque point singulier d'une surface plate, on peut associer une *courbure* qui est l'opposé de la différence entre son angle conique et 2π , de sorte que la courbure en un point régulier est nulle, et que les points dont l'angle est plus petit que 2π (resp. plus grand que 2π) ont une courbure positive (resp. négative). Comme la courbure de la métrique plate est concentrée uniquement aux points singuliers, une variante du Théorème de Gauss-Bonnet nous fournit une relation entre la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface et la courbure totale des points singuliers.

Lorsqu'une structure conforme sur la surface est fixée, d'après un résultat de Troyanov [96], cette relation est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une métrique plate avec des angles donnés aux points marqués.

Les surfaces de translation peuvent être considérées comme des analogues des tores plats en genre supérieur. Le Théorème de Gauss-Bonnet implique qu'une telle surface a nécessairement des points coniques. Comme l'holonomie de la métrique autour de ces points sont des translations, ce qui veut dire que la partie rotationnelle est triviale, les angles coniques doivent être des multiples entiers de 2π . Une autre propriété remarquable de surfaces translation est que le transport parallèle (sur le fibré tangent) ne change pas la direction des vecteurs tangents. Par conséquent, on peut associer à chaque direction dans \mathbb{RP}^1 un feuilletage de la surface par des géodésiques dans cette direction.

Une importante source d'exemples de telles surfaces provient du problème des billards dans un polygone dont les angles sont des multiples rationnels de π , on les appelle *polygones rationnels*. Par un procédé de « dépliage » découvert par Katok-Zemliakov, qui consiste à prendre un certain nombre de copies du même polygone et de les recoller le long des côtés parallèles et de même longueur, on pourra construire une surface de translation telle que les trajectoires du billard dans le polygone original deviennent des géodésiques sur cette surface.

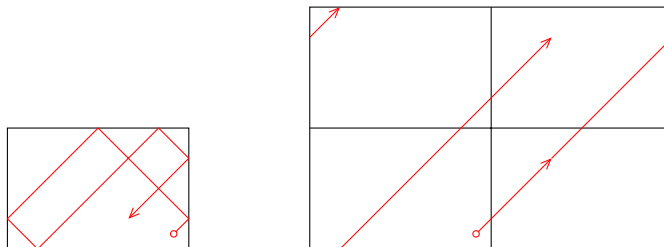


FIGURE 1. Construction d'une surface de translation (de genre 1) associée aux billards dans un rectangle

Les surfaces de translation apparaissent aussi naturellement dans la théorie des échanges d'intervalles. Rappelons qu'un échange d'intervalles est un système dynamique associé à une application d'un intervalle de \mathbb{R} dans lui-même continue en dehors d'un nombre fini de points, dont la restriction à chaque sous-intervalle de continuité est une translation. Chaque échange d'intervalles est complètement décrit par des données combinatoires qui encodent la permutation des sous-intervalles, et des paramètres réels donnant les longueurs des sous-intervalles. Notons qu'un échange de deux intervalles n'est rien d'autre qu'une rotation du cercle.

Il se trouve que sous une certaine condition d'irréductibilité, on peut construire une surface de translation telle que l'échange d'intervalles en question est réalisé par le premier retour

du feuilletage vertical de la surface sur un intervalle transversal. Pour des définitions plus précises des échange d'intervalles et leurs propriétés, nous recommandons le cours de J.-C. Yoccoz [102] et le survol de A. Zorich [104, Chap.5].

Les surfaces plates se trouvent donc au croisement d'une variétés de thématiques : la théorie de Teichmüller, les échanges d'intervalles, la géométrie, topologie et dynamique dans l'espace de modules de surfaces de Riemann, la dynamique des homéomorphismes pseudo-Anosov sur les surfaces, entre autres. Leur étude joue ainsi un rôle important dans la résolution de nombreuses questions importantes dans ces domaines. Plus récemment, des liens entre la théorie des surfaces de translation avec des phénomènes physiques décrit par le modèle « wind-tree » ont été découverts et étudiés par plusieurs auteurs [46, 23, 24, 7]. Ces découvertes élargissent encore de façon significative le champ d'applications de cette théorie.

1.2. Espaces de modules de surfaces de translation. Sur l'ensemble des surfaces de translation on a une grossière classification par les invariants topologiques : le genre, le nombre de singularités, et les angles coniques aux points singuliers. L'ensemble des surfaces ayant les mêmes invariants topologiques est appelé une *strate*.

Il existe une identification entre une surface de translation avec un champ de vecteurs parallèles et un couple (X, ω) , où X est une surface de Riemann compacte (sans bord) et ω est une 1-forme holomorphe sur X . Le lien entre ces deux objets peut être décrit comme suit : la surface de Riemann est définie par la classe conforme de la métrique plate ; parmi les cartes locales associées à la métrique plate (*i.e.* celles qui envoient isométriquement un ouvert de la surface sur un ouvert de \mathbb{R}^2), on peut trouver un atlas constitué uniquement des cartes qui envoient le champ de vecteur choisi sur le champ de vecteur constant $(0, 1)$ de \mathbb{R}^2 . Les fonctions de transition pour cette famille de cartes sont alors de la forme $z \mapsto z + c$ où c est une constante. Par conséquent, la 1-forme dz est invariante par ces changements de cartes. On obtient ainsi une 1-forme holomorphe sur la surface de Riemann qui est non-nulle en dehors des points singuliers de la métrique plate.

Par cette identification, un point singulier pour la métrique plate correspond à un zéro de la 1-forme ω , l'ordre k du zéro et l'angle conique θ au point singulier sont reliés par la formule suivante

$$\theta = 2\pi(k + 1).$$

Ainsi, une strate des surfaces de translation s'identifie à l'ensemble des couples (X, ω) où le nombre de zéros de ω et leur ordre sont fixés. En raison de cette identification, on utilise souvent la notation $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$, où les k_i sont des entiers positifs indiquant les ordres des zéros de ω , pour désigner les strates de surfaces de translation. Notons que par le théorème de Riemann-Roch, on doit avoir

$$k_1 + \dots + k_n = 2g(X) - 2,$$

où $g(X)$ est le genre de X . Cette relation peut aussi s'interpréter comme une variante du Théorème de Gauss-Bonnet.

Pour tout entier $g \geq 2$ fixé, les surfaces de translation de genre g sont donc paramétrées par le fibré $\mathcal{H}_g := \Omega\mathfrak{M}_g$ au-dessus de l'espace de modules de surfaces de Riemann \mathfrak{M}_g . Pour tout $X \in \mathfrak{M}_g$, la fibre de $\Omega\mathfrak{M}_g$ en X est l'espace vectoriel (de dimension complexe g) des 1-formes holomorphes sur X . Par définition, les strates sont donc des parties de $\Omega\mathfrak{M}_g$. Il est bien connu que chaque strate est un orbifold algébrique complexe de \mathcal{H}_g . En général, les strates ne sont pas des fibrations sur \mathfrak{M}_g (ce qui peut se démontrer par un simple calcul des dimensions).

Considérons maintenant une surface de translation représentée par un couple $(X_0, \omega_0) \in \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$. Soient $\Sigma := \{x_1, \dots, x_n\}$ l'ensemble des zéros de ω_0 , où x_i est un zéro d'ordre k_i . Choisissons une famille de cycles $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ représentant une base d'homologies relatives $H_1(X_0, \Sigma, \mathbb{Z})$. Pour tout couple (X, ω) au voisinage de (X_0, ω_0) dans $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$, en utilisant un homéomorphisme entre X_0 et X , on peut aussi considérer $\{\gamma_1, \dots, \gamma_d\}$ comme une base d'homologie relatives $H_1(X, \{\text{zéro de } \omega\}, \mathbb{Z})$. On appellera la correspondance

$$\Phi : (X, \omega) \in \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n) \mapsto \left(\int_{\gamma_1} \omega, \dots, \int_{\gamma_d} \omega \right) \in \mathbb{C}^d$$

une *application de périodes*. Il est bien connu que Φ réalise un homéomorphisme local entre un voisinage de (X_0, ω_0) dans $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ et un ouvert de \mathbb{C}^d (voir e.g. [62, 97, 98]). En particulier, on obtient

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n) = 2g + n - 1.$$

Les strates ne sont pas connexes en général, dans [53] Kontsevich et Zorich donnent une classification des composantes connexes de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$. D'après ce résultat, si l'un des entiers k_i est impair alors $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ est connexe, sinon $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ a au plus 3 composantes.

En utilisant les applications de périodes comme des cartes locales pour $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$, on a un atlas dont les fonctions de transition sont données par des matrices dans $GL(d, \mathbb{Z})$, qui correspondent aux changements de bases de $H_1(X_0, \Sigma, \mathbb{Z})$. Par conséquent, on a une structure de variété affine complexe ainsi qu'une forme volume naturelle ν sur $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ ¹ induite par la mesure de Lebesgue de \mathbb{C}^d .

Dans ce système de coordonnées locales, on peut faire la distinction entre les *périodes absolues*, qui correspondent aux intégrales de ω le long des cycles dans $H_1(X, \mathbb{Z})$, et les *périodes relatives*, qui sont des intégrales le long des cycles dans $H_1(X, \{\text{zéros de } \omega\}, \mathbb{Z}) \setminus H_1(X, \mathbb{Z})$.

Notons que l'aire de la surface plate définie par le couple (X, ω) se calcule facilement en fonction des périodes absolues. Si $\{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\}$ est une base symplectique de $H_1(X, \mathbb{Z})$, et

1. Plus précisément, $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ est le quotient d'une variété affine complexe par un groupe agissant proprement discontinument (pas nécessairement librement) qui préserve la forme volume ν .

$\zeta_i := \int_{a_i} \omega$, $\xi_i := \int_{b_i} \omega$, alors

$$\text{Aire}(X, \omega) = \int_X \omega \wedge \bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g (\zeta_i \bar{\xi}_i - \bar{\zeta}_i \xi_i).$$

Soit $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ l'ensemble des couples $(X, \omega) \in \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ dont l'aire de la surface plate associée est égale à 1. Soit ν_1 la forme volume induite par ν sur $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$. Il est aisé de voir que les espaces $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ et $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ ne sont pas compacts et le volume total de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ par rapport à ν est infini. En revanche, on a le résultat suivant, qui est fondamental pour la théorie

Théorème 1.1 (Masur, Veech). *Le volume total de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ par rapport à ν_1 est fini.*

Dans la littérature, on rencontre souvent une autre classe de surfaces plates appelées *surfaces de demi-translation*. Il s'agit des structures métriques euclidiennes sur des surfaces compactes dont la partie linéaire de l'holonomie est dans $\pm \text{Id}_2$. Ces métriques plates sont associées aux formes quadratiques méromorphes avec des pôles simples sur les surfaces de Riemann compactes. Sur une telle surface, le transport parallèle peut inverser les directions, il n'est donc plus possible de définir des champs de vecteurs parallèles. Néanmoins, il est toujours possible de définir un feuilletage associé à chaque élément dans $\mathbb{R}P^1$. L'intérêt de ces formes quadratiques vient du fait qu'elles représentent des éléments du fibré cotangent de l'espace de modules \mathfrak{M}_g , et les feuilletages qu'elles induisent sur la surface fournissent des outils importants pour étudier les homéomorphismes pseudo-Anosov.

L'espace des formes quadratiques sont aussi stratifié de la même façon que l'espaces des 1-formes holomorphes. On note par $\mathcal{Q}(d_1, \dots, d_m)$ l'ensemble des couples (Y, q) tels que q admet exactement m zéros dont les ordres sont donnés par (d_1, \dots, d_m) (un pôle simple est un zéro d'ordre -1). La classification des composantes connexes de $\mathcal{Q}(\cdot)$ a été obtenue par Laneeau [55].

Étant donné une forme quadratique (Y, q) , il existe un revêtement ramifié canonique à deux feuillets $\pi : X \rightarrow Y$ et une 1-forme holomorphe ω sur X telle que $\pi^*q = \omega^2$. Par construction, les propriétés métriques de la surface de demi-translation définie par q peuvent être déduites de celles de la surface de translation définie par ω . Comme il est plus confortable de travailler avec les surfaces de translation, à une forme quadratique on substitue souvent la 1-forme holomorphe correspondante sur le revêtement à deux feuillets associé. Ainsi, on peut identifier les strates des formes quadratiques à des sous-variétés des strates de l'espace des 1-formes holomorphes.

1.3. Action de $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$. Il existe une action du groupe $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ sur l'espace de surfaces de translation. Pour décrire cette action, on utilise le fait que toute surface de translation peut être obtenue à partir d'une collection de polygones dans le plan \mathbb{R}^2 en recollant les côtés parallèles de même longueur.

Soit A une matrice dans $GL^+(2, \mathbb{R})$. En appliquant cette matrice à chacun de ces polygones, on obtient alors une nouvelle collection de polygones. Il est important d'observer que la matrice A envoie les côtés parallèles de même longueur sur les côtés parallèles et de même longueur. On pourra alors construire une nouvelle surface de translation en recollant les côtés des polygones dans la nouvelle famille. Ainsi, on a une action de $GL^+(2, \mathbb{R})$ sur l'espace de surfaces de translation.

Comme la nouvelle surface a les mêmes caractéristiques topologiques (genre, nombre de singularités, angles coniques) que l'ancienne, on en déduit que l'action de $GL^+(2, \mathbb{R})$ préserve les strates. Il découle aussi des définitions que l'action du sous-groupe $SL(2, \mathbb{R})$ de $GL^+(2, \mathbb{R})$ préserve la forme volume naturelle ν sur les strates. De plus, l'action du sous-groupe des matrices diagonales $g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ induit un flot sur l'espace de modules \mathcal{M}_g qu'on appelle *le flot géodésique de Teichmüller*, ce flot est un objet central dans la théorie de Teichmüller.

Par construction, l'action du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ laisse invariante l'aire des surfaces, il s'ensuit que cette action (ainsi que celle de $\{g_t, t \in \mathbb{R}\}$) préserve $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ et la forme volume ν_1 . Le théorème suivant est l'un des piliers de la théorie

Théorème 1.2 (Masur, Veech). *Les actions des groupes $\{g_t, t \in \mathbb{R}\}$ et $SL(2, \mathbb{R})$ sont ergodiques par rapport à la forme volume ν_1 dans chacune des composantes de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$.*

Il s'avère que les propriétés géométriques et dynamiques d'une surface de translation donnée sont liées de façon intrinsèque au comportement de son $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite dans l'espace de modules. À titre d'exemple, rappelons le célèbre résultat suivant de H. Masur

Théorème 1.3 (Masur). *Soit (X, ω) une surface de translation appartenant à la strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$. L'orbite $\{g_t \cdot (X, \omega), t \in \mathbb{R}\}$ est dite divergente si pour tout compact $K \subset \mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > T$, $g_t \cdot (X, \omega) \notin K$. Si cette orbite n'est pas divergente, elle est dite récurrente.*

Soit \mathcal{F} le feuilletage dans la direction verticale de X . Supposons que l'orbite de (X, ω) par le sous-groupe des matrices diagonales $\{g_t, t \in \mathbb{R}\}$ est récurrente dans sa strate. Alors toutes les feuilles de \mathcal{F} sont denses dans X et \mathcal{F} admet une unique mesure transversale invariante à multiplication par une constante près. Un tel feuilletage est dit uniquement ergodique.

On appelle le stabilisateur dans $GL^+(2, \mathbb{R})$ d'une surface (X, ω) son *groupe de Veech*. Comme l'aire de (X, ω) doit être préservée, le groupe de Veech est en fait inclus dans $SL(2, \mathbb{R})$. On le note souvent $SL(X, \omega)$. Il est bien connu que ce groupe est un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$.

Un autre groupe important lié à l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ est le groupe des *automorphismes affines*. On appelle automorphisme affine de (X, ω) un homéomorphisme de X dont l'expression dans les cartes de la métrique plate est donnée par des applications affines de \mathbb{R}^2 . Le groupe des automorphismes affines est noté par $\text{Aff}^+(X, \omega)$.

Par définition, il est facile de voir que la différentielle d'un automorphisme affine est constante et à l'image dans $SL(2, \mathbb{R})$. Si on associe à tout automorphisme affine sa différentielle,

on aura alors un morphisme de groupes $D : \text{Aff}^+(X, \omega) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$. L'image de $\text{Aff}^+(X, \omega)$ par D est précisément le groupe de Veech $\text{SL}(X, \omega)$.

Pour tout (X, ω) , $\text{Aff}^+(X, \omega)$ est un sous-groupe du Mapping Class Group $\text{Mod}(S)$, où S est une surface topologique homéomorphe à X (voir [64, Section 5]). Soit ϕ un élément de $\text{Aff}^+(X, \omega)$. Alors, ϕ est un pseudo-Anosov si et seulement si $D(\phi)$ est un élément hyperbolique de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Si $\text{Aff}(X, \omega)$ contient un tel élément, on dit souvent que (X, ω) est *stabilisé par un homéomorphisme pseudo-Anosov*.

L'importance des groupes $\text{Aff}^+(X, \omega)$ et $\text{SL}(X, \omega)$ pour la compréhension de $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -orbites est soulignée par

Théorème 1.4 (Smillie). *L'orbite $\text{GL}^+(2, \mathbb{R}) \cdot (X, \omega)$ est un fermé dans sa strate si et seulement si $\text{SL}(X, \omega)$ est un réseau de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Dans ce cas, on appelle (X, ω) une surface de Veech.*

Notons que $\text{SL}(X, \omega)$ n'est jamais un réseau co-compact de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

En général, le feuilletage d'une surface de translation associé à une direction donnée est compliqué à comprendre. Comme on a vu plus haut, il existe des feuilletages pour lesquels toutes les feuilles sont denses dans la surface. Dans de rares situations, on peut trouver des directions pour lesquelles le feuilletage est particulièrement simple : chaque feuille est soit une géodésique (régulière) fermée, soit un segment dont les extrémités sont des points singuliers. Un tel feuilletage est dit *périodique*. Dans le cas des surfaces de Veech, un avatar du lien « caché » entre les propriétés d'une surface et son orbite par $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ est le résultat suivant

Théorème 1.5 (Smillie, Veech). *Soit (X, ω) une surface de Veech. Pour toute direction $\theta \in \mathbb{RP}^1$, le feuilletage associé à θ est soit périodique, soit uniquement ergodique.*

Ainsi, on peut voir les surfaces dont l'orbite par $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ est un fermé dans sa strate comme des généralisations des tores plats par rapport aux flots directionnels.

Outre ces deux résultats, dans de nombreuses situations, la connaissance de la fermeture de la $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -orbite est la clef pour les calculs explicites des invariants géométriques et dynamiques de la surface de départ, comme par exemple le nombre de liens de selles (ou de cylindres) de longueur bornée par une constante, ou les exposants de Lyapunov pour l'action sur le fibré de Hodge, etc... Pour plus de détails et des énoncés plus précis, les lecteurs intéressés peuvent consulter, entre autres, les articles de Bainbridge [9, 10], Chen-Möller [19, 20], Eskin-Kontsevich-Zorich [31]...

Pour toutes ces raisons, la classification des adhérences de $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -orbites (ou de façon équivalente de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -orbites) est devenue l'un des problèmes centraux de la théorie. Une partie importante de mes travaux porte sur ce problème. Nous allons y revenir avec plus de précision dans les chapitres suivants.

2. SOUS-VARIÉTÉS AFFINES

Les résultats classiques de Masur et Veech montrent que l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ est ergodique dans chaque composante de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ par rapport à la mesure naturelle des strates. Par conséquent, presque toutes $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites (pour la mesure de Lebesgue ν) sont denses dans sa composante. On appelle alors une surface dont l'orbite par $GL^+(2, \mathbb{R})$ est dense dans sa composante une surface *générique*.

Bien que presque toute surface soit générique, il est souvent très difficile de savoir si une surface donnée est générique, ou encore de déterminer l'adhérence précise de son orbite. Par ailleurs, on sait que dans chaque strate il existe toujours des surfaces dont la $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite est elle-même une partie fermée : il s'agit des surfaces à *petits carreaux*. Ces surfaces sont des revêtements du tore standard, ramifiés au-dessus d'un seul point. On peut les construire explicitement en recollant un certain nombre de carrés de même taille (d'où le terme *surfaces à petits carreaux*). Ces surfaces sont en particulier des surfaces de Veech (d'après un résultat de Gutkin-Judge [37]), leur groupe de Veech est commensurable à un sous-groupe d'indice fini de $SL(2, \mathbb{Z})$. Pour une introduction plus approfondie sur ces fascinants objets, nous recommandons les articles d'Hubert-Lelièvre [44, 45]. Il ressort de ces observations qu'une classification des adhérences de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites n'est *a priori* pas un problème trivial.

2.1. Travaux d'Eskin-Mirzakhani-Mohammadi. En faisant le lien avec la théorie de Ratner, il a été conjecturé par Kontsevich et Eskin que les adhérences de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites sont toujours des sous-variétés (orbifolds) algébriques des strates. Cette conjecture était corroborée par des résultats partiels de Kontsevich et de Möller (voir [81] Prop. 1.2 et Th.4.1). Dans de nombreuses situations, cette conjecture s'avère exacte, mais la preuve pour le cas général restait pendant longtemps (plus d'une décennie) inaccessible. Grâce au travail phénoménal de plusieurs auteurs, notamment A. Eskin, M. Mirzakhani, A. Mohammadi, G. Forni, M. Möller, A. Avila, S. Filip, A. Wright, cette conjecture est désormais complètement confirmée. Pour énoncer leurs résultats attardons-nous quelques instants pour rappeler quelques notions clefs.

Définition 2.1 ([32]). Soient $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ une strate de l'espace de modules de surfaces de translation de genre g et $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ sa sous-variété constituée des surfaces d'aire 1. On dit qu'une mesure de probabilité μ_1 sur $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ invariante par $SL(2, \mathbb{R})$ est affine si elle satisfait :

- Le support de μ_1 , noté par \mathcal{M}_1 , est une sous-variété immergée de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$, i.e. il existe une variété \mathcal{N}_1 et une application propre et continue $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ localement homéomorphe sur son image telle que $f(\mathcal{N}_1) = \mathcal{M}_1$. L'ensemble des points d'auto-intersection de \mathcal{M}_1 (ceux dont l'image inverse par f contient plus d'un point) est de mesure nulle par rapport à μ_1 . De plus, tout point de \mathcal{N}_1 possède un voisinage U tel que $\mathbb{R} \cdot f(U)$ est un ouvert dans sous-espace vectoriel complexe de \mathbb{C}^d défini par des équations linéaires avec coefficients réels (ici, on identifie $f(U)$ à une partie de \mathbb{C}^d avec $d = 2g + n - 1$ par des applications de périodes).

- Soit $d\mu$ la mesure sur $\mathbb{R} \cdot f(U)$ définie par $d\mu_1 dA$, où A est la fonction l'aire. Alors, à une constante multiplicative près, μ est égale à la mesure de Lebesgue du sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^d qui contient $\mathbb{R} \cdot f(U)$ comme un ouvert.

Définition 2.2 ([32]). Une sous-variété immergée de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ est appelée sous-variété affine invariante si elle est le support d'une mesure de probabilité affine invariante par $SL(2, \mathbb{R})$.

Dans [32], Eskin et Mirzakhani démontrent le résultat suivant

Théorème 2.3 (Eskin-Mirzakhani). Soit μ_1 une mesure de probabilité sur $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ invariante par l'action du sous-groupe parabolique $P := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}$ de $SL(2, \mathbb{R})$. Alors μ_1 est invariante par $SL(2, \mathbb{R})$ et affine.

En se servant de ce résultat, dans [33] Eskin, Mirzakhani, et Mohammadi démontrent

Théorème 2.4 (Eskin-Mirzakhani-Mohammadi). Soit (X, ω) une surface de translation dans $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$. Alors $\overline{P \cdot (X, \omega)} = \overline{SL(2, \mathbb{R}) \cdot (X, \omega)}$ est une sous-variété affine invariante de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$. Toute partie fermée invariante par P de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ est une réunion finie de sous-variétés affines invariantes.

Ce théorème implique que l'adhérence de toute $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite est une sous-variété complexe de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ définie localement par des équations linéaires à coefficients réels dans les coordonnées d'applications de périodes. De plus, on a

Théorème 2.5 (Eskin-Mirzakhani-Mohammadi [33]). Soient \mathcal{M}_1 une sous-variété affine invariante de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$, et $\{\mathcal{N}_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-variétés affines invariante de \mathcal{M}_1 . Notons μ_1 et ν_1^n les mesures de probabilité $SL(2, \mathbb{R})$ -invariantes dont les supports sont \mathcal{M}_1 et \mathcal{N}_1^n respectivement. Supposons qu'il n'existe pas de sous-suite de $\{\mathcal{N}_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui est contenue dans une sous-variété affine stricte de \mathcal{M}_1 . Alors, la suite des mesures $\{\nu_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers μ_1 .

Ce théorème implique en particulier que si $\{\mathcal{N}_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille infinie de sous-variétés affines de \mathcal{M}_1 qui n'est pas contenue dans une réunion finie de sous-variétés affines strictes de \mathcal{M}_1 , alors

$$\mathcal{M}_1 = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_1^n}.$$

Comme il est souvent plus confortable de travailler sur les sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^d que des sous-variétés d'une hypersurface de \mathbb{C}^d , dans ce qui suit, on va utiliser le terme *sous-variété affine* pour désigner les sous-variétés de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ qui s'écrivent comme $\mathbb{R}_{>0} \cdot \mathcal{M}_1$, où \mathcal{M}_1 est une sous-variété affine invariante de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$.

Rappelons que pour toute surface de translation $M := (X, \omega) \in \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$, l'espace tangent en M s'identifie à $H^1(X, \Sigma, \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R})$, où Σ est l'ensemble des zéros de ω . De plus, nous avons naturellement sur $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ un fibré vectoriel plat, appelé *fibré de Hodge*, dont la fibre au dessus de M est $H^1(X, \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R})$. Notons par p la projection naturelle $p : H^1(X, \Sigma, \mathbb{R}) \rightarrow$

$H^1(X, \mathbb{R})$. L'une des conséquence du Théorème 2.4 est que si M est inclus dans une sous-variété affine $\mathcal{M} = \mathbb{R}_{>0} \cdot \mathcal{M}_1$ (où \mathcal{M}_1 est une le support d'une mesure de probabilité affine sur $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$), alors l'espace tangent $T_M \mathcal{M}$ se décompose comme somme directe

$$T_M \mathcal{M} = T_M^{\mathbb{R}} \mathcal{M} \oplus iT_M^{\mathbb{R}} \mathcal{M}, \text{ où } T_M^{\mathbb{R}} \mathcal{M} = T_M \mathcal{M} \cap H^1(X, \Sigma, \mathbb{R}).$$

Après que les théorèmes 2.3, 2.4 ont été annoncés, d'autres résultats importants s'en suivent donnant des caractérisations encore plus précises des adhérences de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites. Parmi ces résultats, citons d'abord le théorème suivant

Théorème 2.6 (Avila-Eskin-Möller [6]). *Soient \mathcal{M}_1 une sous-variété affine de $\mathcal{H}_1(k_1, \dots, k_n)$ et $M = (X, \omega)$ un point dans \mathcal{M} . Alors $p(T_M^{\mathbb{R}} \mathcal{M}) \subset H^1(X, \mathbb{R})$ est symplectique, c-à-d. la restriction de la forme d'intersection de $H^1(X, \mathbb{R})$ à $p(T_M^{\mathbb{R}} \mathcal{M})$ est non-dégénérée. De plus, la restriction du fibré de Hodge sur \mathcal{M} est semi-simple, i.e. tout sous-fibré invariant par l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ admet un complémentaire invariant.*

Il est bien connu que les espaces \mathfrak{M}_g et $\Omega \mathfrak{M}_g$ sont des variétés algébriques quasi-projectives. Il découle du Théorème 2.4 que les adhérences de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites sont toutes des sous-variétés complexe-analytiques de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ et donc de $\Omega \mathfrak{M}_g$. Une naturelle question est de savoir si elles sont aussi des sous-variétés algébriques. Dans le cas des orbites fermées (i.e. surfaces de Veech) la réponse est « oui » par des résultats de Smillie et Weiss. Grâce à un résultat de Filip, nous avons maintenant une réponse positive à cette question pour le cas général.

Théorème 2.7 (Filip [35]). *Toute sous-variété affine invariante de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ est une sous-variété algébrique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. De plus, pour toute $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite dans $\Omega \mathfrak{M}_g$, l'adhérence de sa projection dans \mathfrak{M}_g est aussi une sous-variété algébrique de \mathfrak{M}_g .*

Intéressons-nous maintenant aux équations définissant les sous-variétés affines invariantes.

Définition 2.8 (Kenyon-Smillie). *Soit (X, ω) une surface de translation. Soit $\Lambda \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ l'image de l'application $c \in H_1(X, \mathbb{Z}) \mapsto \int_c \omega \in \mathbb{C}$. Il existe un (unique) plus petit corps $\mathbf{k} \subset \mathbb{R}$ tel qu'il y a deux vecteurs $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ de \mathbb{R}^2 satisfaisant la condition suivante : tout élément $v \in \Lambda$ peut s'écrire $v = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ avec $a, b \in \mathbf{k}$. On appelle \mathbf{k} le corps d'holonomie de (X, ω) . Notons que \mathbf{k} est aussi le plus petit corps tel que $\Lambda \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \simeq \mathbf{k}^2$*

D'après le Théorème 28 dans [51], si (X, ω) est stabilisée par un homéomorphisme pseudo-Anosov, alors le corps d'holonomie de (X, ω) est au plus de degré g sur \mathbb{Q} .

Définition 2.9 (Wright [100]). *Soit \mathcal{M} une sous variété affine invariante de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$, on appelle corps de définition affine de \mathcal{M} le plus petit corps tel que toutes les équations définissant \mathcal{M} localement dans les cartes produites par des applications de périodes sont à coefficients dans ce corps. On le note $\mathbf{k}(\mathcal{M})$.*

Dans [100], Wright démontre

Théorème 2.10 (Wright). *Le corps de définition affine $\mathbf{k}(\mathcal{M})$ d'une sous-variété affine invariante $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ est l'intersection de tous les corps d'holonomie de toutes les surfaces dans \mathcal{M} . Il satisfait*

$$\dim_{\mathbb{R}} p(T^{\mathbb{R}} \mathcal{M}) \times \deg_{\mathbb{Q}} \mathbf{k}(\mathcal{M}) \leq 2g.$$

où $p : T_{(X, \omega)}^{\mathbb{R}} \mathcal{M} \rightarrow H^1(X, \mathbb{R})$ est la projection définie plus haut. Comme $\dim_{\mathbb{R}} p(T^{\mathbb{R}} \mathcal{M}) \geq 2$, on a $\deg_{\mathbb{Q}} \mathbf{k}(\mathcal{M}) \leq g$.

Chaque strate $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ peut contenir des sous-variétés affines qui proviennent des revêtements ramifiés des surfaces de genre plus petit. Les équations qui définissent ces sous-variétés sont à coefficients dans \mathbb{Q} . Par ailleurs, les $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites fermées sont des sous-variétés de dimension deux, qui sont définies localement par des équations à coefficients réels dans corps réel de degré au plus g sur \mathbb{Q} (voir [51, Sect. 7]). Si le degré maximal est atteint, on dit que la surface de Veech associée est *algébriquement primitive*.

Une surprenante conséquence du Théorème 2.10 est qu'on peut facilement trouver d'exemples de surfaces dont la $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite est dense dans sa strate, il suffit que ses coordonnées (dans une carte de périodes) ne satisfassent aucune équation à coefficients dans un corps réels de degré au plus g sur \mathbb{Q} . De tels exemples ont été donnés dans [100].

2.2. Déformations cylindriques dans une adhérence d'orbite. Les Théorème 2.3 et 2.4 nous fournissent également des outils à première vue élémentaires mais qui se révéleront extrêmement puissants pour explorer les sous-variétés affines. Soit $M := \overline{(X, \omega)}$ un point dans une sous-variété affine \mathcal{M} de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ (on peut supposer que $\mathcal{M} = GL^+(2, \mathbb{R}) \cdot M$). Afin d'énoncer des résultats dans cette direction, rappelons d'abord quelques notions importantes sur les surfaces plates. Un *lien de selles* (saddle connection) de M est un segment géodésique dont les extrémités sont des points singuliers qui ne contient aucun point singulier à l'intérieur. Un *cylindre* de M est une partie ouverte C isométrique à $\mathbb{R} \times (0; h) / \mathbb{Z}$, où l'action de \mathbb{Z} est engendrée par $(x, y) \mapsto (x + w, y)$ pour un certain $w > 0$, et maximal par rapport à cette propriété (*i.e.* C n'est pas proprement inclus dans un autre cylindre plus grand). On appelle h la hauteur, et w la largeur de C , le rapport h/w est appelé *module* de C .

Par construction, C est une réunion des géodésiques fermées simples, parallèles et de même longueur. On appelle n'importe quelle courbe dans cette famille *l'âme* de C , et la direction de son vecteur d'holonomie la direction du cylindre. Il est facile de voir que chaque surface de translation ne peut contenir qu'un nombre fini (borné par une constante dépendant des données topologiques de sa strate) de cylindres dans une direction donnée.

La projection (localement isométrique) de $\mathbb{R} \times (0; h)$ à C peut être prolongée par continuité à une application de $\mathbb{R} \times [0; h]$ dans M , on appellera les images de $\mathbb{R} \times \{0\}$ et de $\mathbb{R} \times \{h\}$ les *bords inférieur* et *supérieur* de C . Chaque composante du bord de C est une réunion des liens de selles parallèles aux géodésiques fermées contenues dans C . Notons que comme parties de

M , les deux composantes de bord de C ne sont pas forcément disjointes, elles peuvent même être égales. Si le feuilletage de M est périodique dans une direction θ , alors M se décompose comme réunion de cylindres et de liens de selles dans cette direction. On dit aussi que M admet une *décomposition en cylindres* dans la direction θ .

Supposons maintenant qu'on a sur M une famille de cylindres $C := \{C_1, \dots, C_k\}$ dans la direction horizontale. Si on applique simultanément l'une des matrices $a_t := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ et $u_s := \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aux cylindres dans cette famille et on maintient le reste de la surface inchangé, comme les bords de C_1, \dots, C_k ne sont pas affectés par ces matrices, on peut alors recoller les cylindres transformés au reste de la surface pour obtenir de nouvelles surfaces, que l'on va noter par $a_t^C(M)$ et $u_s^C(M)$ respectivement, qui appartiennent à la même strate.

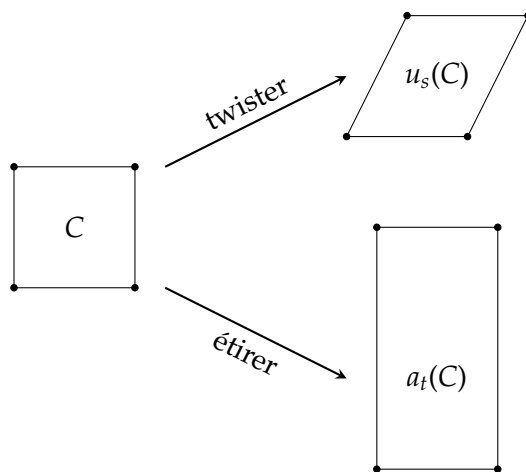


FIGURE 2. « Twister » et « étirer » un cylinder.

En combinant le Théorème 2.4 avec des résultats de Minsky-Weiss [77] et de Smillie-Weiss [93], A. Wright obtient le résultat suivant

Théorème 2.11 (Wright [101]). *Supposons que C contient tous les cylindres horizontaux de M . Alors pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, la surface $u_s^C(a_t^C(M))$ appartient aussi à \mathcal{M} .*

Par Théorème 2.4, on peut identifier $T_M^{\mathbb{R}}\mathcal{M}$ à un sous-espace vectoriel de $H^1(X, \Sigma; \mathbb{R})$. Par dualité, toute courbe fermée (cycle dans $H_1(X, \mathbb{Z})$) peut être considérée comme un élément de $(T_M^{\mathbb{R}}\mathcal{M})^*$. Rappelons également que l'image de $T_M^{\mathbb{R}}\mathcal{M}$ par la projection naturelle $p : H^1(X, \Sigma; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{R})$ est symplectique par Théorème 2.6. Par conséquent, la dimension de $p(T_M^{\mathbb{R}}\mathcal{M})$ doit être paire. Par une analyse fine des sous-espaces de $H^1(X, \Sigma; \mathbb{R})$ qui sont en lien avec les actions de $\{a_t, t \in \mathbb{R}\}$ et $\{u_s, s \in \mathbb{R}\}$ sur les cylindres (horizontaux), Wright démontre

Théorème 2.12 (Wright [101]). *Soit*

$$r := \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} p(T_M^{\mathbb{R}}\mathcal{M}).$$

Alors il existe dans \mathcal{M} une surface $M = (X, \omega)$ qui admet une décomposition en k cylindres dans la direction horizontale telle que les âmes de ces cylindres engendrent un sous-espace de dimension r dans $(T_M^{\mathbb{R}}\mathcal{M})^*$. En particulier, on a $k \geq r$. De plus, pour toute surface dans \mathcal{M} admettant une décomposition en cylindres dans la direction horizontale, les âmes de ces cylindres ne peuvent pas engendrer un sous-espace de dimension plus grand que r dans $(T_M^{\mathbb{R}}\mathcal{M})^*$.

À partir de ce résultat, Wright propose la définition suivante

Définition 2.13 ([101]). *Le rang cylindrique d'une sous-variété affine \mathcal{M} de $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ est*

$$\text{rk}(\mathcal{M}) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} p(T^{\mathbb{R}}\mathcal{M}).$$

Notons que les strates $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ sont de rang g , et une $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -orbite fermée est de rang 1. Nous allons voir plus loin qu'il existe des sous-variétés affines de rang 1 qui ne sont pas des orbites fermées.

Soit $(X, \omega) \in \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ une surface de translation. Par des résultats classiques en théorie de Teichmüller, nous savons qu'il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ de (X, ω) tel que pour tout $(X', \omega') \in \mathcal{V}$, il existe un homéomorphisme $f : X \rightarrow X'$ qui envoie l'ensemble des zéros de ω sur celui de ω' en respectant les ordres. Soit γ un lien de selles ou une géodésique fermée sur (X, ω) , on dit que γ persiste sur (X', ω') si $f(\gamma)$ est homotope à un lien de selles ou une géodésique fermée de (X', ω') . Il est bien connu que pour tout lien de selles (resp. géodésique fermée) γ , il existe un voisinage \mathcal{V} tel que γ persiste sur toute surface dans \mathcal{V} .

Définition 2.14 (Wright [101]). *Soit \mathcal{M} une sous-variété affine invariante, et $M := (X, \omega)$ une surface contenue dans \mathcal{M} . Soient C_1, C_2 deux cylindres sur (X, ω) . On dit que C_1 et C_2 sont \mathcal{M} -parallèles ou \mathcal{M} -équivalents s'ils sont parallèles sur (X, ω) et il existe un voisinage de \mathcal{V} de (X, ω) dans $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_n)$ tel que pour tout $(X', \omega') \in \mathcal{M} \cap \mathcal{V}$, C_1 et C_2 persistent sur (X', ω') et sont toujours parallèles.*

Il existe une autre façon de définir cette notion de \mathcal{M} -parallélisme. Rappelons que localement on peut identifier \mathcal{M} à un ouvert d'un sous-espace vectoriel V de $H^1(X, \Sigma; \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R})$. Comme V est défini par des équations linéaires à coefficients réels, on peut écrire $V = V_{\mathbb{R}} \oplus iV_{\mathbb{R}}$, où $V_{\mathbb{R}} := V \cap H^1(X, \Sigma; \mathbb{R})$. Soient c_1, c_2 deux courbes fermées simples dans C_1 et C_2 respectivement. Ces courbes représentent des cycles dans $H_1(X, \mathbb{Z})$. On peut donc les considérer comme des éléments dans $H^1(X, \Sigma; \mathbb{R})^*$ par dualité. Notons η_i l'élément de $H^1(X, \Sigma; \mathbb{R})^*$ correspondant à c_i . La condition que C_1 et C_2 sont \mathcal{M} -parallèles est alors équivalente à la propriété suivante : il existe un réel λ tel que V est inclus dans $\ker(\eta_1 - \lambda\eta_2)$.

L'intérêt de cette notion de \mathcal{M} -parallélisme réside en partie dans le résultat suivant

Théorème 2.15 (Wright [101]). *Soient $M = (X, \omega)$ une surface de translation contenue dans une sous-variété affine invariante \mathcal{M} . Supposons qu'il existe une famille maximale de cylindres $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ qui sont deux-à-deux \mathcal{M} -parallèles. Alors pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, la surface $u_s^C(a_t^C(M))$ est aussi incluse dans \mathcal{M} .*

Ces résultats représentent des avancées extraordinaires de la thématique, ils permettent de trouver des réponses aux questions jusqu'alors sans espoir. Néanmoins, ils ne nous donnent pas *à priori* la liste des adhérences possibles, ou de déterminer avec précision l'adhérence d'une $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite donnée. Malgré ces progrès remarquables récents, la classification de ses orbites reste un problème difficile et tout à fait d'actualité.

3. CLASSIFICATION EN GENRE 2

En genre deux, la classification des sous-variétés affines a été résolue avant que les résultats d'Eskin-Mirzakhani-Mohammadi ne soient annoncés par des travaux révolutionnaires de C. McMullen² avec des contributions de M. Möller et K. Calta.

Rappelons qu'une 1-forme holomorphe sur une surface de Riemann de genre 2 a soit un zéro double, soit deux zéros simples. L'espace des surfaces de translation en genre 2 contient donc deux strates $\mathcal{H}(2)$ et $\mathcal{H}(1, 1)$. Il se trouve que toutes ces deux strates sont connexes, et on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(2) = 4, \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(1, 1) = 5.$$

On appelle *ordre quadratique* un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + bx + c)$, où b et c sont des entiers. Comme les anneaux correspondant à deux polynômes unitaires dans $\mathbb{Z}[x]$ de même discriminant sont isomorphes, les ordres quadratique sont classifiés par leur discriminant $D = b^2 - 4c$. On appellera un *discriminant* tout entier positif D congru à 0 ou à 1 modulo 4. L'ordre quadratique associé à un discriminant D est noté par \mathcal{O}_D .

Dans sa classification des $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites dans \mathcal{M}_2 , McMullen a mis en lumière une classe spéciale de surfaces de translation qu'il appelle *formes propres pour multiplication réelle par \mathcal{O}_D* . Rappelons qu'une variété abélienne est un quotient \mathbb{C}^g/Λ , où Λ est un réseau isomorphe à \mathbb{Z}^{2g} muni d'une forme bilinéaire alternée $(,)$ telle que $(u, v) \in \mathbb{Z}$ pour tout $(u, v) \in \Lambda^2$. Cette forme bilinéaire est appelée la *polarisation* de la variété.

Soit A une variété abélienne de dimension 2. On dit que cette variété admet une *multiplication réelle par \mathcal{O}_D* s'il existe un sous-anneau de son anneau d'endomorphismes, auto-adjoint par rapport à sa polarisation, isomorphe à \mathcal{O}_D qui n'est pas proprement inclus dans un autre sous-anneau satisfaisant les même propriétés.

La jacobienne d'une surface de Riemann X est le quotient de l'espace dual de ses 1-formes holomorphes par son groupe d'homologie, c-à-d.

$$\text{Jac}(X) := \Omega(X)^*/H_1(X, \mathbb{Z}),$$

où $\Omega(X)$ est l'espace vectoriel des 1-formes holomorphes sur X . Elle est donc une variété abélienne de dimension $g(X)$, dont la polarisation est donnée par la forme d'intersection de $H_1(X, \mathbb{Z})$.

2. En fait, la classification de McMullen n'est pas tout à fait complète, il manque encore la classification des orbites de surfaces à petits carreaux dans $\mathcal{H}(1, 1)$.

Supposons maintenant que X est une surface de Riemann de genre 2 et que $\text{Jac}(X)$ admet une multiplication réelle par \mathcal{O}_D . Par définition, les endomorphismes de $\text{Jac}(X)$ sont des endomorphismes du dual de l'espace des 1-formes holomorphes sur X . On a également une action par dualité de \mathcal{O}_D sur $\Omega(X)$. Une *forme propre pour une multiplication réelle* en genre 2 est donc un couple (surface de Riemann, 1-forme holomorphe) telle que la jacobienne de la surface admet une multiplication réelle par un certain anneau \mathcal{O}_D , et que la 1-forme est un vecteur propre pour l'action duale de \mathcal{O}_D . Pour plus de détails sur les variétés abéliennes et les multiplications réelles, nous renvoyons le lecteur aux articles de C.McMullen [67, 73].

D'une certaine façon, on peut voir les formes propres comme des surfaces de translation avec des symétries « cachées ». Malgré leur définition quelque peu technique, il existe des moyens simples pour en construire des exemples, car on a

Théorème 3.1 (McMullen [73], Th. 5.8.). *Soit (X, ω) une surface de translation de genre deux. Si le groupe de Veech $SL(X, \omega)$ de (X, ω) contient un élément hyperbolique Φ , alors (X, ω) est une forme propre la multiplication réelle par un ordre quadratique \mathcal{O}_D tel que $\mathbb{Q}(\sqrt{D}) = \mathbb{Q}(\text{Tr}(\Phi))$.*

Pour un discriminant D fixé, on note par ΩE_D l'ensemble des couples $(X, \omega) \in \Omega \mathfrak{M}_2$ qui satisfont

- la jacobienne $\text{Jac}(X) := \Omega(X)^*/H_1(X, \mathbb{Z})$ admet une multiplication réelle par \mathcal{O}_D ,
- ω est un vecteur propre pour l'action duale de \mathcal{O}_D sur $\Omega(X)$.

On note également $\Omega E_D(2)$ et $\Omega E_D(1, 1)$ les intersections de ΩE_D avec les strates $\mathcal{H}(2)$ et $\mathcal{H}(1, 1)$ respectivement. Dans [73], McMullen démontre

Théorème 3.2 (McMullen [73] Th.4.1.). *Pour tout discriminant $D \geq 4$, ΩE_D est une sous-variété connexe de dimension complexe 3 de $\Omega \mathfrak{M}_2$. L'ensemble \mathcal{E}_2 des formes propres pour une multiplication réelle dans $\Omega \mathfrak{M}_2$ est donc la réunion disjointe de ces sous-variétés*

$$\mathcal{E}_2 = \bigsqcup_{D \geq 4} \Omega E_D.$$

Théorème 3.3 (McMullen [73] Th.1.2.). *Soit $Z = \overline{\text{GL}^+(2, \mathbb{R}) \cdot (X, \omega)}$ une adhérence d'orbite de surface de translation dans $\Omega \mathfrak{M}_2$. Alors, on a exactement une des situations suivantes*

- (1) $Z = \text{GL}^+(2, \mathbb{R}) \cdot (X, \omega)$, dans ce cas Z est une orbite fermée incluse dans un des lieux ΩE_D qui se projette sur une courbe de Teichmüller dans \mathfrak{M}_2 .
- (2) (X, ω) est une forme propre par une multiplication réelle, mais Z n'est pas une orbite fermée. Dans ce cas, il existe un discriminant D tel que $Z = \Omega E_D$.
- (3) $(X, \omega) \in \mathcal{H}(2)$ n'est pas une forme propre. Dans ce cas $Z = \mathcal{H}(2)$.
- (4) $(X, \omega) \in \mathcal{H}(1, 1)$ n'est pas une forme propre. Dans ce cas $Z = \mathcal{H}(1, 1) \cup \mathcal{H}(2) = \Omega \mathfrak{M}_2$.

Ces résultats sont les fruits d'une formidable combinaison des techniques provenant de différents domaines : géométrie algébrique complexe, topologie de surfaces et dynamique des feuilletages mesurés, théorie de Ratner sur l'action des groupes unipotents dans des

espaces homogènes etc... Notons dans le même article [73], McMullen obtient aussi une classification des mesures de probabilité invariantes par $SL(2, \mathbb{R})$ dans $\Omega\mathfrak{M}_2$.

Dans [17] K. Calta donne une autre caractérisation plus géométrique des formes propres pour une multiplication réelle indépendamment des travaux de McMullen. Elle introduit une classe de surfaces dites *complètement périodiques* qui vérifient la condition suivante : s'il existe une géodésique fermée dans une direction donnée, alors le flot directionnel dans cette direction est périodique. Cette classe contient les surfaces de Veech (voir Théorème 1.5). Il ressort des résultats de Calta [17] que dans le cas de genre 2, être une forme propre pour une multiplication réelle est équivalent à être complètement périodique.

Les Théorèmes 3.2 et 3.3 donnent la liste complète des adhérences de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites de dimension (complexe) au moins 3 dans $\Omega\mathfrak{M}_2$. Pour les orbites fermées (celles qui sont de dimension 2) dans $\mathcal{H}(2)$, McMullen prouve

Théorème 3.4 (McMullen [69]). *Toute $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite fermée est incluse dans un des lieux $\Omega E_D(2)$. Soit $D \geq 5$ un discriminant. Si $D \equiv 0, 4, 5 \pmod{8}$ ou $D = 9$, alors $\Omega E_D(2)$ contient une seule orbite fermée. Si $D \equiv 1 \pmod{8}$ et $D \neq 9$, alors on a deux orbites fermées, distinguées par l'invariant spin.*

Pour obtenir ce résultat McMullen analyse les directions périodiques des formes propres, et les encode par des familles d'entiers dépendant du discriminant appelés *prototypes*. Il introduit ensuite un algorithme (appelé *Butterfly move*) pour passer d'un prototype à d'autres prototypes sur la même orbite. Grâce à cette combinatoire et en utilisant des arguments de théorie des nombres entre autres, il obtient que pour chaque valeur de D la famille des prototypes a au plus deux classes d'équivalence. Pour des valeurs de D telles que $D \equiv 0, 4, 5 \pmod{8}$, par des arguments combinatoires explicites, McMullen montre qu'en fait il y a une seule classe d'équivalence de prototypes, ce qui montre immédiatement que le lieu $\Omega E_D(2)$ contient une seule $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite. Pour le cas $D \equiv 1 \pmod{8}$, il y a une obstruction numérique qui interdit toute opération Butterfly-move qui connecte les deux classes d'équivalence de prototypes. Pour traiter ce cas, McMullen introduit un invariant *spin* qui permet de montrer que $\Omega E_D(2)$ contient au moins deux $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites. On peut donc conclure que pour ces valeurs de D , $\Omega E_D(2)$ contient exactement deux $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites. Notons qu'une partie de ce résultat est également prouvée par une autre méthode par Hubert et Lelièvre [45].

Enfin, pour les orbites fermées dans $\mathcal{H}(1, 1)$ on a

Théorème 3.5 (McMullen [71]). *Si $Z = GL^+(2, \mathbb{R}) \cdot (X, \omega)$ est une orbite fermée dans $\mathcal{H}(1, 1)$ et (X, ω) n'est pas une surface à petits carreaux, alors Z est l'orbite de la surface obtenue à partir d'un décagone régulier dans le plan en recollement les paires de côtés opposés. En particulier, il y a une seule orbite fermée dans $\mathcal{H}(1, 1)$ qui n'est pas engendrée par une surface à petits carreaux.*

Pour montrer ce théorème, McMullen utilise de façon cruciale un résultat de M.Möller [79] sur les images des singularités (*i.e.* les zéro de la 1-forme) d'une surface de Veech par l'application de Jacobi. La classification des $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites dans $\Omega\mathfrak{M}_2$, à l'exception de celles des surfaces à petits-carreaux, est donc complète.

4. VARIÉTÉS PRYM ET FORMES PROPRES EN GENRE 3,4,5

Dans [72], McMullen généralise la notion de *forme propre pour une multiplication réelle* et montre que des analogues de ces formes propres existent aussi en genre 3,4,5. Il en déduit l'existence de nouvelles familles de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites fermées primitives, *i.e.* les surfaces de Veech qui les engendrent ne sont pas des revêtements ramifiés des surfaces de Veech de genre plus petit.

Pour être plus précis, on appelle une *forme Prym* une surface de translation (X, ω) telle qu'il existe une involution ρ de X qui satisfait $\rho^*\omega = -\omega$. Soit (X, ω, ρ) un triplet où (X, ω) est une surface de translation et ρ une involution de X comme ci-dessus, la *variété Prym* associée à ρ est définie par

$$\text{Prym}(X, \rho) := (\Omega^-(X, \rho))^*/H_1^-(X, \mathbb{Z}),$$

où $\Omega^-(X, \rho) = \{\eta \in \Omega(X) \mid \rho^*\eta = -\eta\}$, et $H_1^-(X, \mathbb{Z}) = \{c \in H_1(X, \mathbb{Z}) : \rho(c) = -c\}$. Il s'agit donc d'une sous-variété abélienne de la jacobienne de X . Fixons un genre $g \geq 2$. Pour tout discriminant D , on note par ΩE_D l'ensemble des couples $(X, \omega) \in \Omega\mathfrak{M}_g$ tels que

- il existe une involution $\rho : X \rightarrow X$ telle que $\rho^*\omega = -\omega$,
- la variété $\text{Prym}(X, \rho)$ est dimension 2 et admet une multiplication réelle par l'ordre quadratique \mathcal{O}_D ,
- ω est un vecteur propre pour l'action duale de \mathcal{O}_D sur $\Omega^-(X, \rho)$.

On appelle les éléments de ΩE_D des *formes propres de la variété Prym pour une multiplication réelle par \mathcal{O}_D* , ou plus simplement des formes propres de la variété Prym. Notons que dans cette définition, l'involution ρ n'est pas forcément unique. En revanche, une fois que l'involution ρ est donnée, il existe un unique discriminant D tel que $\text{Prym}(X, \rho)$ admet une multiplication réelle par \mathcal{O}_D . Notons que pour les surfaces de genre deux, ρ doit être l'involution hyperelliptique, et $\text{Prym}(X, \rho)$ est en fait la jacobienne $\text{Jac}(X)$.

Par la formule Riemann-Hurwitz, il est aisé de voir que la condition $\dim \Omega^-(X, \rho) = \dim \text{Prym}(X, \rho) = 2$ implique que $2 \leq g(X) \leq 5$. Par conséquent, les formes propres de la variété Prym ne pourraient exister que dans $\Omega\mathfrak{M}_g$ pour $g \in \{2, 3, 4, 5\}$.

Par la suite, pour tout $\kappa = (k_1, \dots, k_n)$, on va noter par $\Omega E_D(\kappa)$ l'intersection de ΩE_D avec la strate $\mathcal{H}(\kappa)$. Si $\mathcal{H}(\kappa)$ a plusieurs composantes, on rajoute l'un des exposants « hyp », « odd », « even » pour indiquer l'intersection de ΩE_D avec la composante correspondante. Dans [72], McMullen démontre

Théorème 4.1 (McMullen [72]). *Pour tout discriminant D , le lieu ΩE_D est un fermé et invariant par $GL^+(2, \mathbb{R})$ de $\Omega \mathfrak{M}_g$.*

Pour $g \in \{2, 3, 4\}$, $\Omega E_D(2g - 2)$ est une réunion finie de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites fermées primitives.

Remarque 4.2. *Par Riemann-Hurwitz, on montre facilement que $\Omega E_D(2g - 2)$ est vide si $g = 5$.*

4.1. Classification des $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites dans les lieux $\Omega E_D(2g - 2)$.

En utilisant un résultat similaire au Théorème 3.1 (voir [72, Th.3.5]), McMullen montre qu'il existe des familles infinies de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites fermées primitives dans les strates $\mathcal{H}(2), \mathcal{H}(4), \mathcal{H}(6)$ (cf. [72, Th.1.1]). Ces orbites sont engendrées par des formes propres Prym dont le groupe de Veech contient un élément hyperbolique. Par construction, ces formes propres appartiennent à un des lieux $\Omega E_D(2g - 2)$, $g \in \{2, 3, 4\}$. Par Théorème 4.1, on en déduit que leur $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites sont fermées, et ces formes propres sont donc des surfaces de Veech. Si la trace de l'élément hyperbolique en question est un nombre réel quadratique sur \mathbb{Q} , alors la surface de Veech obtenue est primitive. Notons que pour trouver des surfaces dont le groupe de Veech contient un élément hyperbolique, on a une construction standard due à Thurston, qui consiste à construire une surface plate à partir de deux familles de courbes fermées simples. Par construction, le groupe de Veech de la surface contient deux éléments paraboliques dont le produit donne un élément hyperbolique.

La classification des $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites dans $\Omega E_D(2)$ était obtenue par McMullen (cf. Théorème 3.4). Pour les orbites dans $\Omega E_D(4)$ et $\Omega E_D(6)$, dans une collaboration avec E. Lanneau, nous avons montré.

Théorème i (Lanneau-N. [56]). *Les lieux $\Omega E_D(4)$ sont deux à deux disjoints. Pour tout discriminant $D \geq 8$, on a*

- (1) $\Omega E_D(4)$ est vide si $D \in \{9, 16\}$ ou si $D \equiv 5 \pmod{8}$.
- (2) $\Omega E_D(4)$ contient une seule $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite si $D \equiv 0, 4 \pmod{8}$ et $D \neq 16$.
- (3) $\Omega E_D(4)$ contient deux $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites si $D \equiv 1 \pmod{8}$ et $D \neq 9$.

Pour obtenir ce résultat nous analysons les décompositions en cylindres des surfaces dans $\Omega E_D(4)$. Nous montrons qu'à chaque décomposition en cylindres on peut associer une famille de paramètres entiers appelée *prototype*. Nous généralisons ensuite l'algorithme de McMullen pour passer d'un prototype à d'autres prototypes sur la même orbite. En suivant la même stratégie que McMullen, nous réussissons à montrer qu'il existe une ou deux classes d'équivalence de prototypes. Dans le cas où il y a une seule classe d'équivalence, on en déduit immédiatement qu'il existe une seule orbite. Lorsqu'il y a deux classes d'équivalence le problème est un peu plus délicat car il se peut que ces deux classes appartiennent à la même orbite. Néanmoins, dans ce cas nous avons trouvé un invariant de parité (dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) qui nous permet de conclure qu'il y a exactement deux orbites. Notons que cet invariant n'est pas de même nature que celui utilisé par McMullen distinguer les orbites dans $\Omega E_D(2)$. Par une stratégie similaire, nous avons obtenu une classification partielle pour $\Omega E_D(6)$.

Théorème ii (Lanneau-N. [56]). *Pour tout discriminant $D \geq 5$ et $D \neq 9$, le lieu $\Omega_{E_D}(6)$ est non-vide et contient au plus 2 $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites. Si de plus D est impair, alors $\Omega_{E_D}(6)$ contient une seule $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite.*

Pour des valeurs paires de D , la principale difficulté qui nous a empêché de trouver le nombre exact d'orbites dans $\Omega_{E_D}(6)$ est qu'il est impossible d'utiliser l'algorithme « Butterfly move » de McMullen pour connecter les deux classes d'équivalence de prototypes. Pourtant, dans tous les exemples que nous avons considérés, nous trouvons toujours une seule orbite. En utilisant une méthode alternative, nous pouvons enfin prouver

Théorème iii (Lanneau-N. [60]). *Pour tout discriminant $D \geq 5$ et $D \neq 9$, $\Omega_{E_D}(6)$ est non-vide et contient une seule $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite.*

Rappelons que la projection d'une $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite fermée dans l'espace de modules \mathfrak{M}_g est une courbe de Teichmüller. Pour les orbites dans $\Omega_{E_D}(2g-2)$, $g = 2, 3, 4$, on peut réaliser ces courbes de Teichmüller comme des courbes immergées dans les surfaces modulaires de Hilbert. On peut alors utiliser les techniques de géométrie algébrique complexe pour calculer leur caractéristique d'Euler orbifold. Pour $\Omega_{E_D}(2)$ ces calculs ont été faits par Bainbridge dans [9], pour $\Omega_{E_D}(4)$ et $\Omega_{E_D}(6)$ ils ont été faits par Möller dans [82]. Les nombres de points d'orbifolds et leur ordre ont été calculés par Mukamel [84] pour les courbes engendrées par $\Omega_{E_D}(2)$, et par Torres-Teigell et Zachhuber [95] pour les courbes engendrées par $\Omega_{E_D}(4)$.

4.2. Classifications dans les lieux formes propres de dimension 3.

Les lieux de formes propres Prym $\Omega_{E_D}(\kappa)$ sont des exemples de sous-variétés affines de $\mathcal{H}(\kappa)$ qui ne sont pas obtenues par revêtements ramifiés des sous-variétés affines dans des espaces de surfaces de (demi)-translation de genre plus petit. Dans un certain sens, elles sont « primitives ». Jusqu'à présent, ce sont les seuls exemples de ce type de sous-variétés affines que l'on connaisse en dehors des $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites fermées³.

Dans le cas $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_{E_D}(\kappa) = 3$, le lieu $\Omega_{E_D}(\kappa)$ peut être réalisé comme un \mathbb{C}^* -fibré sur un ouvert dense d'une certaine surface modulaire de Hilbert (voir [73, Sect. 4]). La liste des strates $\mathcal{H}(\kappa)$ dont l'intersection avec Ω_{E_D} donne des sous-variétés de dimension 3 est donnée dans [58, Tab. 1]. En genre 2, $\dim \Omega_{E_D}(\kappa) = 3$ si et seulement si $\kappa = (1, 1)$. La classification de ces sous-variétés affines est incluse dans la classification de McMullen (cf. Théorème 3.2).

En genre 3, $\dim \Omega_{E_D}(\kappa) = 3$ si $\kappa \in \{(2, 2)^{\text{odd}}, (2, 1, 1)\}$. Dans [59], nous avons obtenu

Théorème iv (Lanneau-N. [59]). *Pour $\kappa \in \{(2, 2)^{\text{odd}}, (2, 1, 1)\}$, et tout discriminant $D \geq 8$, on a*

- (1) *si $D \equiv 0, 4 \pmod{8}$, alors $\Omega_{E_D}(\kappa)$ est non-vide et connexe.*
- (2) *si $D \equiv 1 \pmod{8}$, alors $\Omega_{E_D}(\kappa)$ est non-vide et a deux composantes.*
- (3) *si $D \equiv 5 \pmod{8}$, alors $\Omega_{E_D}(\kappa)$ est vide.*

3. Tout récemment, un exemple de souvariété affine primitive de rang deux en genre 4 a été trouvé par McMullen-Mukamel-Wright [76]

De plus, si $D_1 \neq D_2$, alors $\Omega E_{D_1}(\kappa) \cap \Omega E_{D_2}(\kappa) = \emptyset$.

Pour obtenir cette classification, on démontre qu'à l'exception de deux cas $D = 9$ et $D = 16$, il est toujours possible de déformer une forme propre dans $\Omega E_D(2, 2)^{\text{odd}}$ ou $\Omega E_D(2, 1, 1)$ à une forme propre dans $\Omega E_D(4)$ en contractant des liens de selles invariants par l'involution Prym. On se sert ensuite du Théorème i pour conclure. Cette analyse nous a conduit à la découverte de l'existence des variétés affines $\Omega E_9(\kappa)$ et $\Omega E_{16}(\kappa)$, $\kappa \in \{(2, 2)^{\text{odd}}, (2, 1, 1)\}$, alors que $\Omega E_9(4)$ et $\Omega E_{16}(4)$ n'existent pas.

Nous nous sommes également intéressés aux $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites dans ces sous-variétés. Dans [58], nous démontrons

Théorème v (Lanneau-N. [58]). *Soit (X, ω) une forme propre dans $\Omega E_D(\kappa)$, $\kappa \in \{(2, 2)^{\text{odd}}, (2, 1, 1)\}$. Alors soit $GL^+(2, \mathbb{R}) \cdot (X, \omega)$ est une orbite fermée, soit elle est dense dans une des composantes de $\Omega E_D(\kappa)$.*

Théorème vi (Lanneau-N. [58]). *Si D n'est pas un carré, alors $\Omega E_D(\kappa)$, $\kappa \in \{(2, 2)^{\text{odd}}, (2, 1, 1)\}$ contient au plus un nombre fini de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites fermées.*

Ces deux résultats sont obtenus sans utilisations des résultats d'Eskin-Mirzakhani-Mohammadi. Théorème v est bien évidemment un cas particulier du Théorème 2.4. Son intérêt tient au fait qu'il est obtenu par des arguments plutôt élémentaires et en utilisant des propriétés géométriques de formes propres Prym (voir Section 4.3). Théorème vi est la suite du Théorème v puisqu'une partie importante de sa preuve repose sur les arguments du dernier.

Théorème vi généralise un résultat de McMullen [70, Th.1.1] concernant la finitude des orbites fermées dans $\Omega E_D(1, 1)$. Une nouveauté dans le cas de genre 3 par rapport au celui de genre 2 est que par Théorème 3.5 $\Omega E_D(1, 1)$ ne contient aucune orbite fermée si D n'est pas un carré et $D \neq 5$. Tandis que dans $\mathcal{H}(2, 2)^{\text{odd}}$ on peut montrer qu'il existe une infinité de valeurs de D , qui ne sont pas des carrés, telles que $\Omega E_D(2, 2)^{\text{odd}}$ contient au moins une orbite fermée (voir [58, Appendice A]).

D'après Définition 2.13, les lieux $\Omega E_D(\kappa)$ sont des sous-variétés affines de *rang un*. Rappelons d'abord que si (X, ω) est un point dans $\mathcal{H}(\kappa)$, alors un voisinage de (X, ω) dans $\mathcal{H}(\kappa)$ s'identifie à $H^1(X, \Sigma; \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R})$, où Σ est l'ensemble des zéros de ω . On a également une projection naturelle $p : H^1(X, \Sigma; \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}) \rightarrow H^1(X; \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R})$. Supposons maintenant que (X, ω) est inclus dans une sous-variété affine de rang un \mathcal{M} . Alors, il existe un sous-espace vectoriel $V \subset \ker p \subset H^1(X, \Sigma; \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R})$ définie par des équations linéaires à coefficients réels tel qu'un voisinage de (X, ω) dans \mathcal{M} peut s'identifier à un produit $B \times U$, où B est un voisinage de Id dans $GL^+(2, \mathbb{R})$, et U est un voisinage de 0 dans V . Si dans cette carte locale (X, ω) s'identifie à $(\text{Id}_2, 0)$, alors pour tout vecteur $v \in U$, (Id_2, v) correspond à une surface (X', ω') qui a les mêmes périodes absolues que (X, ω) , mais les périodes relatives sont modifiées par des fonctions linéaires de v .

En fixant une numérotation des zéros de ω , on peut alors écrire $(X', \omega') = (X, \omega) + v$. Il est clair que pour tous $v_1, v_2 \in U$ tels que $v_1 + v_2 \in U$, on a

$$((X, \omega) + v_1) + v_2 = ((X, \omega) + v_2) + v_1 = (X, \omega) + (v_1 + v_2).$$

Ainsi, on obtient une action locale de \mathbb{C}^k , où $k = \dim_{\mathbb{C}} V$, sur \mathcal{M} . Les orbites de cette action nous donnent un feuilletage de \mathcal{M} appelé le *feuilletage noyau* (kernel foliation). Dans les cartes locales par les applications de périodes, les feuilles de ce feuilletage sont des translatés affines d'un sous-espace de dimension k de $\ker p$. Notons que par définition, les surfaces appartenant à la même feuille ont les mêmes périodes absolues.

Après que les Théorèmes 2.3, 2.4, 2.10 sont annoncés, dans une collaboration avec Erwan Lanneau et Alex Wright, nous avons montré une généralisation du Théorème vi dans le contexte général de sous-variétés affines de rang un.

Théorème vii (Lanneau-N.-Wright [61]). *Soit \mathcal{M} une sous-variété affine de rang 1. Si le corps de définition affine de \mathcal{M} n'est pas \mathbb{Q} , alors \mathcal{M} ne contient qu'un nombre fini de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites fermées.*

Pour prouver ce théorème, nous montrons que sous l'hypothèse sur le corps de définition affine, les surfaces de Veech (celles qui engendrent des orbites fermées) ne peuvent pas être denses dans \mathcal{M} . La preuve de ce fait repose sur l'action locale de \mathbb{C}^k sur les feuilles du feuilletage noyau, et un théorème d'Eskin-Mozes-Oh sur des ensembles algébriques de $GL(m, \mathbf{k})$. Nous utilisons enfin Théorème 2.5 pour conclure.

Pour clôturer cette partie, notons que les feuilletages noyaux présentent des dynamiques très riches. Les études de ces feuilletages dans différents contextes ont été réalisées par plusieurs auteurs (voir [74, 39, 41, 16]). Signalons également que d'autres résultats de finitude des $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites fermées ont été prouvés dans [11, 66, 12, 38] entre autres.

4.3. Caractérisations géométrique et dynamique des formes propres Prym.

Dans [17], K.Calta donne des caractérisations géométrique et dynamique des formes propres en genre 2. Elle propose notamment

Définition 4.3. *Soit (X, ω) une surface de translation. On dit que (X, ω) est complètement périodique si le feuilletage dans la direction de tout cylindre est périodique. Autrement dit, s'il existe une géodésique régulière fermée dans une direction $\theta \in \mathbb{R}P^1$, alors la surface se décompose en cylindres dans cette direction.*

Les surfaces de Veech sont des exemples de surfaces complètement périodiques. Il existe des surfaces complètement périodiques qui ne sont pas Veech.

La périodicité du feuilletage dans une direction donnée est équivalente à la périodicité de l'application du premier retour sur un intervalle transversal. Il est souvent instructif de considérer l'échange d'intervalles associé au feuilletage. Un indicateur pour détecter la

périodicité d'un échange d'intervalles est son invariant SAF (SAF est une abréviation de Sah-Arnoux-Fathi). Il s'agit d'un élément de l'espace $\mathbb{R} \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Afin de donner sa définition, rappelons qu'associés à tout échange d'intervalles $f : I \rightarrow I$, on a une décomposition de I en réunion disjointe de sous-intervalles semi-ouverts $\{I_i = [a_i, b_i), i \in \mathcal{A}\}$ et un vecteur $t = \{t_i, i \in \mathcal{A}\} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}$ tels que pour tout $x \in I_i$, $f(x) = x + t_i$. L'invariant SAF de f est alors défini par

$$\text{SAF}(f) := \sum_{i \in \mathcal{A}} |I_i| \wedge_{\mathbb{Q}} t_i \in \mathbb{R} \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

Cet invariant est additif au sens suivant : si l'échange d'intervalles se scinde en 2 échanges d'intervalles dont les supports sont disjoints, alors son invariant SAF est la somme des deux invariants SAF correspondants. De plus, il est invariant par l'induction de Rauzy, ce qui donne un sens à l'invariant SAF du feuilletage dans la direction verticale sur une surface de translation. Dans [3], Arnoux montre que si l'échange d'intervalles est périodique, alors son SAF-invariant s'annule. La réciproque est généralement fautive, sauf pour les cas où on a un échange de deux ou trois intervalles.

Dans [51] R.Kenyon et J.Smillie proposent un autre invariant pour les surfaces de translation appelé l'invariant J. Pour toute surface de translation $J(X, \omega)$ est un élément de $\mathbb{R}^2 \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2$ défini de manière suivante : soit P un polygone dans le plan \mathbb{R}^2 avec une origine fixée dont les sommets x_1, \dots, x_m sont numérotés dans le sens des aiguilles. Soit \vec{v}_i le vecteur donnant la position de x_i . On définit $J(P) := \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3 + \dots + \vec{v}_m \wedge \vec{v}_1$. Supposons que (X, ω) admet une présentation comme une surface obtenue par le recollements des paires de côtés (parallèles et de même longueur) d'une famille de polygones P_1, \dots, P_k , l'invariant $J(X, \omega)$ est alors

$$J(X, \omega) = \sum_{i=1}^k J(P_i) \in \mathbb{R}^2 \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2.$$

Notons que $J(X, \omega)$ ne dépend pas de la présentation polygonale de (X, ω) . Il s'avère que la projection

$$\begin{aligned} J_{xx} : \mathbb{R}^2 \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \wedge_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \wedge_{\mathbb{Q}} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &\mapsto a \wedge c \end{aligned}$$

envoie le J-invariant de (X, ω) sur l'invariant SAF de son feuilletage dans la direction verticale.

Définition 4.4. Soit θ une direction dans \mathbb{RP}^1 . On dit que θ est une direction homologique de (X, ω) s'il existe un cycle $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$ tel que $v := \int_{\gamma} \omega$ est un vecteur non-nul dans la direction θ .

Dans [18] Calta et Smillie proposent la définition suivante

Définition 4.5. On dit que (X, ω) est complètement algébriquement périodique, si l'invariant SAF du feuilletage dans toute direction homologique est nul.

Ils démontrent également

Théorème 4.6 (Caltà-Smillie [18]). *Supposons de le groupe de Veech d'une surface de translation (X, ω) contient un élément hyperbolique Φ . Alors, (X, ω) est complètement algébriquement périodique, et quitte à renormaliser par $GL^+(2, \mathbb{R})$, l'ensemble de ses directions homologiques est $K\mathbb{P}^1$, où $K = \mathbb{Q}(\text{Tr}(\Phi))$.*

Dans [68], McMullen introduit un autre invariant appelé le *flux galoisien* pour les échanges d'intervalles f comme plus haut tels que $t_i \in K$, pour tout $i \in \mathcal{A}$, où K est corps quadratique sur \mathbb{Q} (on dit alors que f est défini sur K). Pour tout $t \in K$, notons t' son conjugué galoisien, le flux galoisien de f est défini par

$$\text{flux}(f) := \sum_{i \in \mathcal{A}} |I_i| t'_i \in \mathbb{R}.$$

Notons que $\text{flux}(f^n) = n \text{flux}(f)$. Par conséquent, si f est périodique, alors $\text{flux}(f) = 0$. Supposons que $\int_{\gamma} \omega \in K(t)$ pour tout $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$. De la même façon que l'invariant SAF, on peut définir l'invariant flux pour le feuilletage dans toute direction homologique de (X, ω) . Dans ce cas, il n'est pas difficile de montrer que si l'invariant flux est nul, alors l'invariant SAF est nul aussi. Dans [68], McMullen démontre

Théorème 4.7 (McMullen [68]). *Si (X, ω) est une forme propre Prym pour une multiplication réelle par \mathcal{O}_D , alors l'invariant flux du feuilletage dans toute direction homologique est nul. Par conséquent, (X, ω) est complètement algébriquement périodique.*

Le théorème suivant découle des résultats de [17]

Théorème 4.8 (Caltà). *Soit (X, ω) une surface de translation de genre 2. Alors (X, ω) est complètement périodique si et seulement si elle est complètement algébriquement périodique. Dans ce cas, elle est aussi une forme propre pour une multiplication réelle.*

Dans [57], nous généralisons ce résultat aux formes propres en genre 3, 4, 5. Nous considérons tous les lieux de formes propres $\Omega_{E_D}(\kappa)$ qui sont des sous-variétés affines de dimension 3. Il se trouve que dans ce cas $\Omega_{E_D}(\kappa)$ est inclus dans une sous-variété affine $\tilde{Q}(\kappa')$ de dimension 5 constituée des surfaces de translation qui sont des revêtements doubles de formes quadratiques.

Théorème viii (Lanneau-N. [57]). *Soit (X, ω) une surface de translation contenue dans un des lieux $\tilde{Q}(\kappa')$ de dimension 5 comme ci-dessus. Alors (X, ω) est une forme propre Prym si et seulement si (X, ω) est complètement algébriquement périodique, et quitte à renormaliser par une matrice dans $GL^+(2, \mathbb{R})$, l'ensemble des directions homologiques de (X, ω) est $K\mathbb{P}^1$, où K est corps réel de degré au plus 2 sur \mathbb{Q} .*

Théorème ix (Lanneau-N. [57]). *Soit (X, ω) une surface de translation contenue dans un des lieux $\tilde{Q}(\kappa')$ de dimension 5 comme ci-dessus. Si (X, ω) est complètement algébriquement périodique, alors (X, ω) est complètement périodique.*

Corollaire 4.9. *Si (X, ω) est une forme propre dans un des lieux $\tilde{\mathcal{Q}}(\kappa')$ comme ci-dessus. Alors (X, ω) est complètement périodique.*

Remarque 4.10. *Corollaire 4.9 est un cas particulier d'un résultat plus général de A. Wright [101], qui est obtenu par une autre méthode.*

Les Théorèmes viii et ix sont obtenus par une étude minutieuse des applications de premier retour des feuilletages dont l'invariant SAF est nul. Comme les surfaces que l'on considère sont des revêtements des formes quadratiques, un outil efficace pour analyser ces applications est les involutions linéaires introduites par Danthony et Nogueira [22] et étudiées en détail par Boissy et Lanneau [14] (voir aussi [8]). Dans cette situation, on a des involutions linéaires qui permutent au plus 6 intervalles. On peut définir l'invariant SAF pour ces involutions en utilisant l'échange d'intervalles qui leur est associé.

En combinant des résultats d'Arnoux [3] et de Boshernitzan [15], on démontre que si l'invariant SAF est nul, les longueurs des intervalles permutés engendrent un espace de dimension 2 sur \mathbb{Q} , et il existe une orbite périodique, alors l'involution linéaire en question est périodique. Théorème ix est une conséquence directe de ce résultat.

Pour montrer Théorème viii, on utilise d'abord Théorème ix, et le fait que les propriétés d'être une forme propre et d'être complètement algébriquement périodique sont préservées par l'action locale du feuilletage noyau. Pour montrer qu'une forme propre est complètement algébriquement périodique, il suffit de trouver dans sa feuille du feuilletage noyau une surface stabilisée par une matrice hyperbolique. On applique ensuite du Théorème 4.6 pour conclure. La réciproque est déjà connue par Théorème 4.7.

Par une extension des techniques mentionnées plus haut, nous obtenons également le résultat suivant

Théorème x (Lanneau-N. [57]). *Soit (X, ω) une surface de translation dans la composante hyperelliptique $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ de $\mathcal{H}(4)$. Si (X, ω) est complètement algébriquement périodique, alors elle est complètement périodique. En particulier, il existe des surfaces complètement périodiques dont $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite est dense dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$.*

Théorème x implique que d'être complètement périodique n'est pas une condition fermée en général.

4.4. Groupes de Veech des formes propres.

Dans [68], McMullen démontre

Théorème 4.11 (McMullen [68]). *Soit (X, ω) une forme propre par multiplication réelle dans $\Omega\mathfrak{M}_2$. Alors, l'ensemble limite de son groupe de Veech $SL(X, \omega)$ est soit vide, soit un point, soit tout le cercle $\partial_\infty\mathbb{H}$.*

Dans [57], nous généralisons ce résultat aux formes propres dans certaines strates en genre plus grand

Théorème xi (Lanneau-N. [57]). *Soit (X, ω) une forme propre Prym dans une des strates $\mathcal{H}(1, 1, 2)$ (genre 3), $\mathcal{H}(4, 1, 1)$ (genre 4), $\mathcal{H}(4, 4)^{\text{even}}$ (genre 5). Alors l'ensemble limite de $SL(X, \omega)$ est soit vide, soit un point, soit tout le cercle $\partial_{\infty}\mathbb{H}$.*

Ce théorème découle aussi d'une analyse minutieuse des applications du premier retour des feuilletage dans les directions homologiques de (X, ω) . Par des contraintes topologiques, on ne peut pas avoir la même conclusion pour les formes propres dans les autres strates. Notons que des exemples de surfaces dont le groupe de Veech est infiniment engendré sont aussi trouvés par Huber et Schmidt dans [47].

Rappelons que les surfaces de Veech (celles dont la $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbite est un fermé dans sa strate) satisfont la propriété dite *dichotomie de Veech* suivante : le feuilletage dans toute direction est soit périodique, soit uniquement ergodique (c-à-d. il existe une unique mesure transverse invariante à une constante multiplicative près). Un feuilletage uniquement ergodique est forcément minimal (i.e. toute feuille est dense dans la surface). On dit qu'une surface de translation satisfait la *dichotomie de Veech topologique* si le feuilletage dans toute direction est soit périodique, soit minimal. En poussant un peu plus loin notre analyse, nous avons obtenu également

Théorème xii (Lanneau-N.[57]). *Il existe des formes propres dans $\mathcal{H}(1, 1, 4)$ et $\mathcal{H}(4, 4)^{\text{even}}$ qui satisfont la dichotomie de Veech topologique sans être des surfaces de Veech.*

Des exemples de surfaces satisfaisant la dichotomie de Veech topologique sans être des surfaces de Veech ont été trouvés dans [21]. Ces exemples sont des revêtements doubles des surfaces de Veech en genre 2 ramifiés au-dessus des points singuliers et un point de connexion apériodique. Un *point de connexion* sur une surface de translation est par définition un point tel que tout segment géodésique joignant ce point à une singularité est inclus dans un lien de selles. Un point de connexion est dit *apériodique* si son orbite par le groupe de Veech est infini. Les exemples dans Théorème xii ne sont pas obtenus de cette façon. Ils constituent donc une nouvelle famille d'exemples de telles surfaces.

5. SOUS-VARIÉTÉS AFFINES DE RANG DEUX EN GENRE 3

5.1. Surfaces génériques dans la composante hyperelliptique $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$.

L'une des innovations de McMullen dans sa classification des adhérences d'orbites en genre deux consiste à décomposer les surfaces de translation de genre 2 en sommes connexes de cylindres et de tores troués joints par des liens de selles parallèles. Cela lui permet d'appliquer un théorème de Ratner sur la classification des orbites par l'action du groupe $\left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ sur les espaces homogènes de types $SL(2, \mathbb{R})^m \times \mathbb{R}^n / SL(2, \mathbb{Z})^m \times \mathbb{Z}^n$.

Cette technique a été reprises par Hubert, Lanneau et Möller pour montrer l'existence des surfaces génériques dans le lieu $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}(2, 2)^{\text{odd}}$. Rappelons que le lieu \mathcal{L} est constitué des couples $(X, \omega) \in \mathcal{H}(2, 2)^{\text{odd}}$ dont la surface X est hyperelliptique, et les deux zéros de ω sont fixés par l'involution hyperelliptique.

D'après les résultats de McMullen (cf. Théorème 3.1) si le groupe de Veech d'une surface de genre deux contient un élément hyperbolique, alors cette surface est une forme propre, et son orbite par $GL^+(2, \mathbb{R})$ ne peut pas être dense dans sa strate. Dans [42, 43] Hubert-Lanneau-Möller ont montré que contrairement au cas de genre 2, il existe des surfaces dans ce lieu \mathcal{L} dont le groupe de Veech contient des éléments hyperboliques (notamment les surfaces d'Arnoux-Yoccoz), mais leur orbite par $GL^+(2, \mathbb{R})$ est dense dans \mathcal{L} .

Inspiré de ces résultats, dans [86], j'ai essayé d'appliquer la même technique aux surfaces dans la composante hyperelliptique $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ de $\mathcal{H}(4)$. Il se trouve que dans cette composante, grâce à l'existence de l'involution hyperelliptique, on peut décomposer toute surface en réunion de parallélogrammes et de cylindres par des liens de selles selon un unique modèle. Notons que les de selles en question ne sont pas forcément parallèles. En rajoutant une hypothèse de parallélisme sur ces liens de selles, j'ai trouvé une condition suffisante pour qu'une surface dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ soit générique (*i.e.* son orbite par $GL^+(2, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$). Bien que cette condition ne soit satisfaite que par un ensemble de surfaces de mesure nulle dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$, elle m'a permis néanmoins de prouver

Théorème xiii (N. [86]). *Soit (X, ω) une surface dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$. Si (X, ω) admet une décomposition en 3 cylindres dans la direction horizontale telle que les modules des cylindres sont indépendants sur \mathbb{Q} , alors (X, ω) est une surface générique.*

Il existe des surfaces génériques dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ avec des périodes dans $K(i)$, où K est un corps réel quadratique sur \mathbb{Q} .

Il existe des surfaces génériques dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ dont le groupe de Veech contient des éléments hyperboliques Φ tels que $\mathbb{Q}(\text{Tr}(\Phi))$ est un corps cubique sur \mathbb{Q} .

Notons que d'après les Théorèmes 4.6 et x, si $(X, \omega) \in \mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ et $SL(X, \omega)$ contient des éléments hyperboliques, alors (X, ω) est complètement périodique. Théorème xiii implique qu'il existe des surfaces génériques complètement périodiques dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$.

5.2. Classification des sous-variétés affines de rang 2.

Depuis les résultats d'Eskin-Mirzakhani-Mohammadi [32, 33] et les contributions d'Avila-Eskin-Möller [6], Wright [100, 101], et Filip [34, 35] nous avons désormais des outils très puissants pour attaquer la classification des adhérences de $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbites. Dans une collaboration avec Alex Wright, en se servant de ces résultats généraux, nous avons montré

Théorème xiv (N.-Wright [90]). *Soit $\mathcal{O} := GL^+(2, \mathbb{R}) \cdot (X_0, \omega_0)$ une $GL^+(2, \mathbb{R})$ orbite dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$. Alors, soit \mathcal{O} est une orbite fermée, soit elle est dense dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$.*

Soit $\mathcal{M} := \overline{\mathcal{O}}$ l'adhérence de \mathcal{O} dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$. Par les Théorèmes 2.4 et 2.6, on sait que \mathcal{M} est une sous-variété affine de dimension paire de $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$. Comme $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{\text{hyp}}(4) = 6$, on a $d := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} \in \{2, 4, 6\}$. Si $d = 2$, on a $\mathcal{M} = \mathcal{O}$, et \mathcal{O} est une orbite fermée. Si $d = 6$, alors par connexité $\mathcal{M} = \mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$, ce qui veut dire que \mathcal{O} est dense dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$. Donc, pour montrer ce théorème, il suffit d'éliminer le cas $d = 4$.

Supposons par absurde que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = 4$. On se place maintenant à un point $(X, \omega) \in \mathcal{M}$ représenté par une surface admettant une décomposition en cylindres dans la direction horizontale (on dit aussi que (X, ω) est horizontalement périodique). L'existence d'une telle surface dans \mathcal{M} est garantie par un théorème de Smillie-Weiss [93]. On pourra utiliser les déformations cylindriques décrites dans Théorème 2.15 pour atteindre d'autres surfaces dans \mathcal{M} . La condition $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = 4$ (qui est équivalente à \mathcal{M} est de rang 2) nous donne une certaine liberté pour choisir les déformations qui nous conviennent. Il s'avère que dans tous les cas, on peut toujours trouver une surface dont l'adhérence de son orbite ne peut pas être contenue dans \mathcal{M} . Ainsi, nous avons une contradiction qui nous permet de conclure qu'il n'existe pas de sous-variété affine de dimension 4 dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$.

Rappelons que le rang cylindrique d'une sous-variété affine est la moitié de sa dimension en coordonnées absolues (voir Définition 2.13). Dans le cas de $\mathcal{H}(4)$, puisque p est un isomorphisme, une sous-variété affine de rang 2 de $\mathcal{H}(4)$ doit être de dimension 4. Une autre formulation du Théorème xiv est qu'il n'existe pas de sous-variété affine de rang 2 dans $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$.

Par un résultat de Kontsevich-Zorich [53], on sait que la strate $\mathcal{H}(4)$ contient deux composantes $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ et $\mathcal{H}^{\text{odd}}(4)$, toutes les deux sont de dimension complexe 6. Dans une collaboration avec David Auricino et Alex Wright, en poursuivant la méthode développée dans [90], nous montrons

Théorème xv (Auricino-N.-Wright [5]). *Soit $\tilde{\mathcal{Q}}(3, -1^3)$ le lieu des 1-formes holomorphes dans $\mathcal{H}(4)$ qui sont des revêtements doubles des formes quadratiques de la strate $\mathcal{Q}(3, -1^3)$ (de genre 1). Alors, $\tilde{\mathcal{Q}}(3, -1^3)$ est l'unique sous-variété affine de rang deux dans $\mathcal{H}^{\text{odd}}(4)$.*

La nouveauté de ce théorème par rapport au précédent est le fait que les déformations cylindriques nous permettent de détecter les symétries sur les surfaces dans les sous-variétés affines particulières, ce qui est indispensable pour montrer qu'une surface de translation est le revêtement double d'une forme quadratique. Cela donne encore plus de force à cet outil qui pourtant pourrait paraître élémentaire.

Le principal obstacle pour étendre cette méthode aux autres strates est le nombre de modèles topologiques pour les décompositions en cylindres à considérer. En cas de $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ ce nombre est faible, on peut donc les examiner cas par cas explicitement. Dans le cas de $\mathcal{H}^{\text{odd}}(4)$ ce nombre est déjà non-négligeable, nous devons prouver des lemmes techniques pour traiter plusieurs cas à la fois. Pour les strates à plusieurs singularités, ce nombre explose très vite, ce qui rend une étude cas par cas impossible. Néanmoins, dans une collaboration avec D. Auricino, nous avons obtenu la classification des sous-variétés affines de rang 2 dans les strates à deux zéros $\mathcal{H}(3, 1)$ et $\mathcal{H}(2, 2)$ en genre 3. Rappelons d'abord que $\mathcal{H}(3, 1)$ est connexe, et $\mathcal{H}(2, 2)$ a deux composantes $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(2, 2)$ et $\mathcal{H}^{\text{odd}}(2, 2)$.

Théorème xvi (Auricino-N. [4]).

- (1) La strate $\mathcal{H}(3, 1)$ ne contient aucune sous-variété affine de rang 2.
- (2) Il existe une seule sous-variété affine de rang 2 dans $\mathcal{H}(2, 2)^{\text{hyp}}$ que l'on va noter par $\tilde{\mathcal{Q}}(1^2, -1^2)$, il s'agit des revêtements doubles des formes quadratiques de la strate $\mathcal{Q}(1^2, -1^2)$. Notons que $\tilde{\mathcal{Q}}(1^2, -1^2)$ est aussi le lieu $\tilde{\mathcal{H}}_{(2,2)}^{\text{hyp}}(2)$ des revêtements doubles non-ramifiés des surfaces dans $\mathcal{H}(2)$ dans la composante $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(2, 2)$.
- (3) Si \mathcal{M} est une sous-variété affine de rang 2 dans la composante $\mathcal{H}^{\text{odd}}(2, 2)$, alors on a
 - Si $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = 5$, alors \mathcal{M} est le lieu $\tilde{\mathcal{Q}}(4, -1^4)$ des revêtements doubles des formes quadratiques de la strate $\mathcal{Q}(4, -1^4)$.
 - Si $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = 4$, alors $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{H}}_{(2,2)}^{\text{odd}}(2)$ le lieu des revêtements doubles non-ramifiés des surfaces de $\mathcal{H}(2)$ dans $\mathcal{H}^{\text{odd}}(2, 2)$.

Pour montrer ce théorème, nous utilisons d'abord un résultat de A. Wright (cf. Théorème 2.10) qui implique que l'ensemble des surfaces à petits carreaux est dense dans toute sous-variété affine de rang 2 en genre 3. Nous utilisons également un résultat de S. Filip (cf. Théorème 2.7) pour en déduire que si on peut déformer une surface dans sous-variété affine de rang 2 $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}(m, n)$ en une surface à une seule singularité (en contractant un lien de selles), alors cette nouvelle surface est incluse forcément dans une sous-variété affine de rang 2 de $\mathcal{H}(4)$. Cela nous permet d'utiliser la classification des sous-variétés affines de rang deux dans $\mathcal{H}(4)$ pour simplifier une partie importante des arguments techniques. Le cœur de la preuve reste en revanche une analyse en détail des modèles topologiques des décompositions en cylindres.

Ces résultats confirment une vague conjecture que les sous-variétés affines de rang au moins deux sont plutôt rares, et proviennent essentiellement des revêtements de surfaces de translation ou de demi-translation de genre plus petit (voir [100, Conj.1.6, 1.7]). Dans une collaboration en cours, nous espérons obtenir la liste complète des sous-variétés affines de rang 2 dans les strates restantes en genre 3, *i.e.* $\mathcal{H}(2, 1, 1)$ et $\mathcal{H}(1, 1, 1, 1)$.

Notons enfin que dans cette direction, on a des résultats importants récents dans lesquels les déformations cylindriques ont joué un rôle primordial.

Théorème 5.1 (Mirzakhani-Wright [78]). *Toute sous-variété affine de rang g dans $\Omega\mathfrak{M}_g$ est soit une composante d'une strate, soit le lieu hyperelliptique d'une strate.*

Théorème 5.2 (Apisa [1]). *Soit \mathcal{M} une sous-variété affine de $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(2g-2)$ ou de $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(g-1, g-1)$. Si $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} > 3$, alors \mathcal{M} est le lieu des revêtements ramifiés des surfaces de translation ou de demi-translation de genre plus petit.*

6. SURFACES PLATES DE GENRE ZÉRO

6.1. Systèmes locaux et métriques hyperboliques sur $\mathfrak{M}_{0,n}$.

Dans [25], Deligne-Mostow ont mis en évidence l'existence des métriques hyperboliques

complexes paramétrées par des familles de poids réels positifs sur l'espace $\mathfrak{M}_{0,n}$ des surfaces de Riemann de genre zéro avec n points marqués. A l'aide de ces métriques, ils ont trouvé des exemples de réseaux hyperboliques complexes (en particulier non-arithmétiques). Plus précisément, étant donné un entier $n \geq 3$, fixons n réels positifs (μ_1, \dots, μ_n) tels que $\mu_1 + \dots + \mu_n = 2$. Notons $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Pour tout ensemble de n points marqués distincts $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$, on considère un système local de rang un \mathbf{L} sur la sphère épointée $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$, avec monodromie $\exp(2\pi i \mu_s)$ en x_s . Il se trouve que l'on a

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma, \mathbf{L}) = n - 2.$$

Notons par $\mathcal{O}(\mathbf{L})$ le faisceau des sections holomorphes du fibré en droites associé à \mathbf{L} (sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$). On appelle *section multivaluée* de \mathbf{L} une section de son tiré-en-arrière sur le revêtement universel de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$. Fixons une section horizontale multivaluée \mathbf{e} de \mathbf{L} sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$. Si D^* est un petit disque centré en un point marqué x_s , toute section de $\mathcal{O}(\mathbf{L})$ sur D^* s'écrit alors $u = z^{-\mu_s} \cdot \mathbf{e} \cdot f$, où f est une fonction holomorphe sur D^* . Notons que $z^{-\mu_s}$ est une fonction multivaluée sur D^* .

De la même façon, une section de $\Omega^1(\mathbf{L})$ sur D^* s'écrit $u = z^{-\mu_s} \cdot \mathbf{e} \cdot f(z)dz$, où f est une fonction holomorphe sur D^* . On dit que u est une section méromorphe de $\mathcal{O}(\mathbf{L})$ ou de $\Omega^1(\mathbf{L})$ si f l'est, et on définit sa valuation en x_s par

$$v_{x_s}(u) := v_{x_s}(f) - \mu_s.$$

On a

Proposition 6.1 (Deligne-Mostow [25]). *Il existe une unique section méromorphe ω_μ de $\Omega(\mathbf{L})$ sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$ avec valuation $-\mu_s$ en x_s à une constante multiplicative près. De plus, cette section définit une classe de cohomologie non-nulle dans $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma; \mathbf{L})$.*

Concrètement, si $\infty \notin \Sigma$, on peut écrire

$$\omega_\mu = \mathbf{e} \cdot \prod_{s=1}^n (z - x_s)^{-\mu_s} dz.$$

Comme les modules des monodromies en x_s sont tous 1, on peut définir une métrique Hermitienne horizontale sur le fibré en droites associé à \mathbf{L} . Grâce à cette métrique, on a une forme Hermitienne $((\cdot, \cdot))$ sur $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$.

Proposition 6.2 (Deligne-Mostow [25]). *Supposons que $0 < \mu_s < 1$ pour tout $s \in \{1, \dots, n\}$, alors $((\cdot, \cdot))$ est de signature $(1, n - 3)$, et on a $(([\omega_\mu], [\omega_\mu])) > 0$, où $[\omega_\mu]$ est la classe de ω_μ dans $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$.*

Comme les constructions ci-dessus s'appliquent à toute partie Σ de cardinal n de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, on a un système local \mathbf{H} de rang $n - 2$ muni d'une métrique Hermitienne horizontale de signature $(1, n - 3)$ sur $\mathfrak{M}_{0,n}$ dont la fibre au-dessus du point représentant $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \Sigma)$ est l'espace $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$. Soit $\mathbb{P}\mathbf{H}$ le fibré projectif associé à \mathbf{H} (i.e. la fibre au-dessus de $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \Sigma)$ est

l'espace projectif $\mathbb{P}H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$. Le tiré-en-arrière de $\mathbb{P}\mathbf{H}$ sur le revêtement universel $\widetilde{\mathfrak{M}}_{0,n}$ de $\mathfrak{M}_{0,n}$ est le fibré trivial de fibre $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-3}$, où on a identifié \mathbb{C}^{n-2} à $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$. La forme Hermitienne de \mathbf{H} nous donne alors une forme Hermitienne constante $((\cdot, \cdot))$ sur \mathbb{C}^{n-2} .

Soit $\mathbf{B}_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ la boule constituée des droites pour lesquelles la restriction de $((\cdot, \cdot))$ est positive, c-à-d.

$$\mathbf{B}_{\mathbb{C}} := \{\mathbb{C} \cdot v \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-3}, ((v, v)) > 0\}.$$

Par Proposition 6.2, la section ω_{μ} de $\Omega(\mathbf{L})$ nous donne une application $\widetilde{\omega}_{\mu} : \widetilde{\mathfrak{M}}_{0,n} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathbb{C}}$, qui associe à un couple $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \Sigma)$ la droite vectorielle dans $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$ engendrée par ω_{μ} . On a

Proposition 6.3 (Deligne-Mostow [25]). *l'application $\widetilde{\omega}_{\mu}$ est holomorphe et étale (localement biholomorphe).*

Comme $\widetilde{\omega}_{\mu}$ est holomorphe, on a un fibré en droites holomorphe \mathcal{L}_{μ} sur $\mathfrak{M}_{0,n}$ dont la fibre en $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \Sigma)$ est la droite engendrée par ω_{μ} dans $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$. De plus, le tiré-en-arrière de la métrique hyperbolique complexe de \mathbf{B} par $\widetilde{\omega}_{\mu}$ nous donne une structure métrique hyperbolique complexe sur $\mathfrak{M}_{0,n}$.

Comme les monodromies de \mathbf{H} doivent préserver la forme Hermitienne $((\cdot, \cdot))$, on a un morphisme de $\pi_1(\mathfrak{M}_{0,n})$ à valeurs dans $PU(1, n-3)$. Soit Γ_{μ} l'image de $\pi_1(\mathfrak{M}_{0,n})$ par ce morphisme. On peut aussi voir Γ_{μ} comme l'image de $\pi_1(\mathfrak{M}_{0,n})$ par la représentation d'holonomie associée la structure métrique hyperbolique complexe induite par $\widetilde{\omega}_{\mu}$. Dans [25], Deligne-Mostow démontrent

Théorème 6.4 (Deligne-Mostow [25]). *Supposons que les poids (μ_1, \dots, μ_n) satisfont la condition suivante*

$$(INT) \quad \text{pour tous } i \neq j \in \{1, \dots, n\}, \text{ si } \mu_i + \mu_j < 1, \text{ alors } (1 - \mu_i - \mu_j)^{-1} \text{ est un entier.}$$

Alors, Γ_{μ} est un réseau de $PU(1, n-3)$.

Dans [83], Mostow démontre que Γ_{μ} est aussi un réseau de $PU(1, n-3)$ sous une hypothèse un peu plus faible que (INT) .

Théorème 6.5 (Mostow [83]). *Supposons que les poids (μ_1, \dots, μ_n) satisfont la condition suivante, pour tous $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\mu_i + \mu_j < 1$*

$$(\Sigma INT) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mu_i \neq \mu_j, \text{ alors } (1 - \mu_i - \mu_j)^{-1} \text{ est un entier,} \\ \text{si } \mu_i = \mu_j, \text{ alors } (1/2 - \mu_i)^{-1} \text{ est un entier.} \end{array} \right.$$

Alors, Γ_{μ} est un réseau de $PU(1, n-3)$.

Ces théorèmes sont le point de départ d'une série de résultats sur des réseaux de $PU(1, n-3)$, mais dont la discussion serait hors du cadre de ce mémoire. Nous renvoyons les lecteurs intéressés au survol [91] de J.R.Parker. Notons simplement que l'une des conséquences de ces théorèmes est que si les poids dans μ satisfont (INT) ou (ΣINT) , alors le volume total de

$\mathfrak{M}_{0,n}$ par rapport à la forme volume de la métrique hyperbolique complexe correspondante est fini.

6.2. Complétion métrique de $\mathfrak{M}_{0,n}$ et variétés coniques.

Dans [94], Thurston retrouve les mêmes réseaux de $\text{PU}(1, n-3)$ que Deligne-Mostow en utilisant l'approche de surfaces plates polyédrales. Pour tout entier $n \geq 3$, on fixe n réels positifs $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tels que $0 < \alpha_i < 2\pi$ et

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2\pi(n-2).$$

Notons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On considère l'espace $C(\alpha)$ des métriques plates sur la sphère \mathbb{S}^2 à homothétie près ayant exactement n singularités avec les angles coniques donnés par $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Notons que par des résultats classiques, on peut identifier $C(\alpha)$ à $\mathfrak{M}_{0,n}$ (voir par exemple [96], ou [94, Sect. 8]). Thurston construit des cartes locales pour $C(\alpha)$ en utilisant des triangulations géodésiques et des applications développantes de la métrique plate. En choisissant $n-2$ arêtes dans une triangulation, on peut définir localement une bijection entre les surfaces plates au voisinage d'un point dans $C(\alpha)$ et un ouvert de $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-3}$. Il se trouve que dans ces coordonnées locales, on peut exprimer l'aire de la surface par une forme Hermitienne de signature $(1, n-3)$, qui induit une métrique hyperbolique complexe sur $C(\alpha)$ et donc une métrique hyperbolique sur $\mathfrak{M}_{0,n}$.

Le lien entre cette construction de Thurston et celle de Deligne-Mostow est le suivant : soient $\mu_i = (1 - \alpha_i/(2\pi))$, et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Les hypothèses sur α impliquent $0 < \mu_i < 1$ et $\mu_1 + \dots + \mu_n = 2$. On peut voir μ_i comme la courbure concentrée au point singulier d'angle α_i . Soit $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$ une partie de cardinal n de \mathbb{S}^2 . On peut alors considérer un système local de rang un \mathbf{L} sur $\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma$ comme plus haut. Soit ω_μ une section méromorphe de $\Omega(\mathbf{L})$ dont la valuation en x_i est $-\mu_i$. Alors $|\omega|^2$ définit une métrique plate sur \mathbb{S}^2 dont l'ensemble de singularités est Σ , et l'angle conique en x_i est α_i . Autrement dit, $|\omega|^2$ représente un point dans $C(\alpha)$. Par construction, on a

$$A(\mathbb{S}^2, |\omega|^2) = \int_{\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma} \omega \wedge \bar{\omega} = (([\omega], [\omega]))$$

où $((\cdot, \cdot))$ est la forme Hermitienne de $H^1(\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$. Par conséquent, la forme Hermitienne associée à l'aire des surfaces dans $C(\alpha)$ n'est rien d'autre que la forme Hermitienne de $H^1(\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$. De plus, il n'est pas difficile de voir que les coordonnées locales définies à l'aide des arêtes dans une triangulation peuvent s'interpréter comme les évaluations de $[\omega] \in H^1(\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$ sur une base de $H_1(\mathbb{S}^2 \setminus \Sigma, \mathbf{L})$. En conclusion, la métrique hyperbolique complexe de Thurston est précisément celle qui est induite par la section holomorphe $\tilde{\omega}_\mu$, une fois qu'on identifie $C(\alpha)$ à $\mathfrak{M}_{0,n}$.

L'interprétation en termes de surfaces plates permet à Thurston d'obtenir de façon naturelle une complétion $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^\mu$ de $\mathfrak{M}_{0,n}$ muni de la métrique hyperbolique complexe associée à la famille de poids μ . Supposons qu'on a deux points singuliers dont les courbures μ_i, μ_j satisfont

$\mu_i + \mu_j < 1$. Il existe des familles de surfaces plates dans $C(\alpha)$ normalisées par la condition « l'aire est égale à 1 » sur lesquelles la distance entre ces deux points singuliers tend vers 0. L'objet à la limite lorsque ces points se confondent est une surface plate avec $n - 1$ points singuliers dont un correspond à la fusion de ces deux points. Par construction, ce nouveau point singulier a la courbure $\mu_i + \mu_j$. Plus généralement, si on a une partition $\{I_1, \dots, I_m\}$ de $\{1, \dots, n\}$ satisfaisant la condition

$$(*) \quad \tilde{\mu}_i := \sum_{j \in I_i} \mu_j < 1 \text{ pour tout } i$$

on peut alors « fusionner » tous les points dans $\{x_j, j \in I_i\}$ en un seul point singulier de courbure $\tilde{\mu}_i$. L'objet limite est alors une surface plate à m points singuliers dans $C(\beta_1, \dots, \beta_m)$ où $\beta_i = 2\pi(1 - \tilde{\mu}_i)$.

Il se trouve que l'opération de fusionner les points singuliers (de courbure totale plus petite que 1) donne des familles de surfaces dans $C(\alpha)$ dont l'image par une application développante pour la métrique hyperbolique complexe reste dans un domaine borné de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^{n-3} \simeq \mathbf{B}_{\mathbb{C}}$. Par conséquent, les surfaces obtenues par ces opérations sont naturellement incluses dans la complétion métrique $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^{\mu}$ de $\mathfrak{M}_{0,n}$.

Par construction $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^{\mu}$ est naturellement stratifié, chaque strate de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^{\mu}$ correspond à une partition de $\{1, \dots, n\}$ satisfaisant (*). Dans [94], Thurston démontre

Théorème 6.6 (Thurston [94]). *Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ une famille de poids réels positifs tels que $\mu_1 + \dots + \mu_n = 2$. Alors, la complétion métrique $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^{\mu}$ de $\mathfrak{M}_{0,n}$ est une variété conique de volume fini. Cette complétion est un orbifold (i.e. un quotient de $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^{n-3}$ par un sous-groupe discret de $\text{PU}(1, n-3)$) si et seulement si (μ_1, \dots, μ_n) satisfait la condition (ΣINT) .*

Remarque 6.7.

- Pour une définition de la notion de variété conique (cone manifold), nous renvoyons le lecteur à l'article de Thurston [94, Sect. 3]. Notons qu'une caractérisation des variétés coniques sphériques a été prouvée par McMullen (voir [75, Th.5.1]).
- La condition que $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^{\mu}$ soit un orbifold est plus forte que la condition que l'image d'holonomie de $\pi_1(\mathfrak{M}_{0,n})$ soit un réseau.
- La complétion $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^{\mu}$ n'est pas toujours compacte. S'il existe une partie $I \subset \{1, \dots, n\}$ telle que $\sum_{i \in I} \mu_i = 1$, alors $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^{\mu}$ a au moins un cusp.

6.3. Calculs du volume.

Pendant longtemps le problème du calcul des volumes pour les métriques métriques hyperboliques complexes de $\mathfrak{M}_{0,n}$ est resté sans réponse. Seuls quelques co-volumes des réseaux de $\text{PU}(2, 1)$ ont été évalués (voir e.g. [103, 92, 91, 48]). Récemment, McMullen [75] a donné une formule générale pour calculer le volume de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^{\mu}$.

Théorème 6.8 (McMullen [75]). Soit g_μ la métrique hyperbolique de $\mathfrak{M}_{0,n}$ associée à la famille de poids $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Alors on a

$$\text{Vol}(\mathfrak{M}_{0,n}, g_\mu) = C_{n-3} \sum_{\mathcal{P}} (-1)^{|\mathcal{P}|+1} (|\mathcal{P}| - 3)! \prod_{\mathcal{B} \in \mathcal{P}} \max(0, 1 - \sum_{i \in \mathcal{B}} \mu_i)^{|\mathcal{B}|-1}$$

où $C_{n-3} = \frac{(-4\pi)^{n-3}}{(n-2)!}$, et \mathcal{P} varie parmi les partitions de $\{1, \dots, n\}$.

Comme toutes les strates ajoutées dans $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^\mu$ sont de codimension strictement positive, on a

$$\text{Vol}(\mathfrak{M}_{0,n}, g_\mu) = \text{Vol}(\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^\mu, g_\mu).$$

Théorème 6.8 découle d'une version du Théorème de Gauss-Bonnet pour les variétés coniques et un calcul explicite de la caractéristique d'Euler des strates de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^\mu$. Notons que dans le cas où $n = 5$ et les poids dans (μ_1, \dots, μ_5) sont des rationnels, la caractéristique d'Euler orbifold de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,5}^\mu$ (et donc le volume de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^\mu$) a été calculée par Kappes et Möller [48].

Avec Vincent Koziarz, un collègue bordelais, nous avons commencé à nous intéresser à ce problème avant que le résultat de McMullen ne soit communiqué. Nous voulions l'aborder par des méthodes de géométrie complexe, en particulier par la théorie des métriques Kähler-Einstein singulières. Rappelons d'abord quelques notions de base. Soit \mathcal{X} une variété projective complexe de dimension N . Un \mathbb{R} -diviseur de \mathcal{X} est une somme formelle

$$D = \sum_{i=1}^k \lambda_i D_i$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}$, et D_i est un diviseur de \mathcal{X} (i.e. une sous-variété irréductible, réduite de codimension 1). Associé à chaque \mathbb{R} -diviseur $\lambda_i D_i$ on a un \mathbb{R} -fibré en droites \mathcal{L}_i dont la classe de Chern dans $H^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ est $\lambda_i D_i$. Sur ce fibré, on peut définir une métrique Hermitienne (singulière) h_i qui est lisse en dehors de D_i , et au voisinage de tout point de D_i , sur lequel D_i est défini comme le lieu des zéros d'une fonction holomorphe f , on a

$$h_i(v_i, v_i) = e^{-\varphi_i},$$

où v_i est une section holomorphe de \mathcal{L}_i partout non-nulle dans ce voisinage, et φ_i est donnée par

$$\varphi_i = \lambda_i \log(|f|^2).$$

Notons que φ_i n'est pas définie sur D_i . Il s'avère que la courbure de cette métrique est un $(1, 1)$ -courant dont la classe dans $H^{1,1}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ est égale à $\lambda_i [D_i]$. Par conséquent, $[D]$ est la classe de cohomologie représentée par la courbure de la métrique $h_D := h_1 \otimes \dots \otimes h_k$ du fibré $\mathcal{L}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_k$.

Supposons désormais que les diviseurs D_i sont à croisements normaux simples et que tous les coefficients λ_i satisfont $\lambda_i < 1$. Notons qu'avec ces conditions D n'est pas forcément effectif. Soit x un point dans le support de D . Supposons que $x \in \cap_{i \in I} D_i$, on va noter $\varphi_D = \sum_{i \in I} \varphi_i$

de telle sorte que si v est une section holomorphe partout non-nulle de $\mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_k$ sur un voisinage U de x , alors

$$h_D(v, v) = e^{\varphi - \varphi_D},$$

où φ est une fonction lisse (à valeurs réelles) sur U .

Notons $K_X = \Omega_X^{N,0}$ le fibré canonique de X . Fixons maintenant une forme volume dV lisse sur X . On peut aussi voir dV comme une métrique Hermitienne du fibré

$$-K_X = \wedge^N T_X^{1,0}.$$

L'opposé de la courbure de cette métrique $\Theta_{K_X} := dd^c \log(dV)$ est donc un représentant de la première classe de Chern $c_1(X)$ de X . On appelle alors une métrique de Kähler-Einstein singulière associée à la paire (X, D) une $(1, 1)$ -forme fermée définie positive Ω définie sur $X \setminus D$ qui satisfait les conditions suivantes (rappelons qu'une $(1, 1)$ -forme ω est dite *définie positive* si la forme bilinéaire symétrique $(u, v) \mapsto \omega(u, Jv)$ est définie positive, où $J : TX \rightarrow TX, J^2 = -\text{Id}$, est la structure complexe de X)

- (1) la métrique de Kähler \mathbf{h} sur $X \setminus D$ dont la partie imaginaire est égale à Ω satisfait $\text{Ric}(\mathbf{h}) = -c\Omega$ sur $X \setminus D$, où c est une constante positive et $\text{Ric}(\mathbf{h})$ est la forme de Ricci de \mathbf{h} définie par $\text{Ric}(\mathbf{h}) = -dd^c \log(\Omega^N)$;
- (2) pour tout point x dans le support de D , on a $\Omega^N = e^{\varphi - \varphi_D} dV$ sur un voisinage U de x , où φ est une fonction continue sur U et lisse en dehors de D .

Sous ces hypothèses, on a l'égalité suivante

$$\text{Ric}(\Omega) = -c\Omega + D$$

au sens des courants sur X , ce qui implique

$$[\Omega] = \frac{1}{c}(c_1(X) + [D]) \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}).$$

Par des arguments classiques utilisant la « régularité » donnée par la condition (2), on obtient

$$\int_{X \setminus D} \Omega^N = \frac{1}{c^N} (K_X + D)^N$$

où K_X et D désignent des diviseurs de X , et le membre de gauche calcule leur intersection.

Notons désormais Ω_μ la forme de Kähler de la métrique hyperbolique complexe sur $\mathfrak{M}_{0,n}$ associée à la famille de poids $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Par la suite, nous utiliserons la même notation pour désigner cette métrique et la forme de Kähler associée. Il est bien connu que la métrique hyperbolique complexe est Kähler-Einstein, et si on la normalise pour que la courbure sectionnelle holomorphe soit égale à -2 , alors, sur $\mathfrak{M}_{0,n}$, on a

$$\text{Ric}(\Omega_\mu) = -(n-2)\Omega_\mu.$$

Nous regardons maintenant $\mathfrak{M}_{0,n}$ comme un ouvert dense dans la compactification de Deligne-Mumford-Knudsen $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$. Rappelons que les points de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n} \setminus \mathfrak{M}_{0,n}$ représentent des courbes stables de genre zéro jointes par des nœuds simples. Pour une introduction sur ce sujet,

le lecteur pourra consulter les livres de Arbarello-Cornalba-Griffiths [2], Harris-Morrison [40], ou le survol de D. Zvonkine [105].

Le complémentaire de $\mathfrak{M}_{0,n}$ dans $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ est une réunion finie de diviseurs dits *vitaux*, chacun est associé à une partition \mathcal{S} de $\{1, \dots, n\}$ en deux parties I_1, I_2 telle que $\min\{|I_0|, |I_1|\} \geq 2$. Soit \mathcal{P} l'ensemble de toutes les partitions de $\{1, \dots, n\}$ en deux parties vérifiant cette condition. Pour toute partition $\mathcal{S} = \{I_0, I_1\} \in \mathcal{P}$, on note par $D_{\mathcal{S}}$ le diviseur de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ associé à \mathcal{S} . On suppose toujours que la partie I_1 vérifie

$$\sum_{i \in I_1} \mu_i \leq 1,$$

et on note $\mu_{\mathcal{S}} := \sum_{i \in I_1} \mu_i$. Il est bien connu que $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ est une variété projective lisse, et que la famille des diviseurs $\{D_{\mathcal{S}}, \mathcal{S} \in \mathcal{P}\}$ sont à croisements normaux simples (voir [50, 52]). De plus, le diviseur canonique $K_{\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}}$ est équivalent à une combinaison linéaire des diviseurs dans cette famille.

Dans [54] nous avons montré

Théorème xvii (Koziarz-N. [54]). *Pour toute partition $\mathcal{S} = \{I_0, I_1\} \in \mathcal{P}$, posons*

$$\lambda_{\mathcal{S}} := (|I_1| - 1)(\mu_{\mathcal{S}} - 1) + 1.$$

Notons que $\lambda_{\mathcal{S}} \leq 1$ pour tout \mathcal{S} . Soit

$$D_{\mu} := \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{P}} \lambda_{\mathcal{S}} D_{\mathcal{S}}.$$

Alors, la métrique Ω_{μ} est alors une métrique de Kähler-Einstein singulière associée à la paire $(\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}, D_{\mu})$. Par conséquent, on a

$$\text{Vol}(\mathfrak{M}_{0,n}, \Omega_{\mu}) = \int_{\mathfrak{M}_{0,n}} \Omega_{\mu}^{n-3} = \frac{1}{(n-2)^{n-3}} (K_{\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}} + D_{\mu})^{n-3} = \frac{1}{(n-2)^{n-3}} \left(\sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{P}} (|I_1| - 1)(\mu_{\mathcal{S}} - \frac{|I_1|}{n-1}) D_{\mathcal{S}} \right)^{n-3}$$

Le cœur de ce résultat est le fait que Ω_{μ} est une métrique de Kähler-Einstein singulière associée à la paire $(\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}, D_{\mu})$. Pour le démontrer, nous construisons des sections holomorphes du fibré \mathcal{L}_{μ} (voir Proposition 6.3) au voisinage de tout point appartenant à $\partial \overline{\mathfrak{M}}_{0,n} = \cup_{\mathcal{S} \in \mathcal{P}} D_{\mathcal{S}}$ dont la norme par rapport à la métrique Hermitienne (\cdot, \cdot) peut être calculée par des formules relativement simples. Comme Ω_{μ} est par définition la courbure de cette métrique Hermitienne sur \mathcal{L}_{μ} , le calcul de la norme de ces sections donne des expressions convenables de Ω_{μ} qui nous permettent de conclure. Notons qu'une partie technique importante de la preuve repose sur la méthode de Thurston pour évaluer l'aire d'une surface plate.

L'espace $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ est naturellement stratifié, chaque strate de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ paramètre des courbes stables qui ont la même surface topologique sous-jacente. La topologie de cette surface est encodée par un arbre dont les sommets sont associés à des sous-ensembles dans une partition de $\{0, \dots, n\}$. En particulier, chaque diviseur $D_{\mathcal{S}}$, où $\mathcal{S} = \{I_0, I_1\}$, correspond à un arbre à deux

sommets associés aux deux parties I_0 et I_1 . Grâce à cette approche de métrique Kähler-Einstein singulière, on peut établir le lien entre la compactification de Deligne-Mumford-Knudsen $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ et les compactifications $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^\mu$ de Thurston. Notamment, chaque strate de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^\mu$ correspond à un facteur qu'on appelle μ -*principal* d'une strate dans $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$. Donc, dans un certain sens, on peut dire que $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^\mu$ peut être obtenue de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ en « oubliant » certains facteurs des strates dans $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la Section 5 de notre article [54].

En raison des renormalisations différentes, notre métrique Ω_μ et la métrique g_μ de McMullen diffèrent d'une constante. Compte tenu de cette constante, nous obtenons

Corollaire 6.9 ([54]). *On a*

$$\left(\sum_{S \in \mathcal{P}} (|I_1| - 1) \left(\mu_S - \frac{|I_1|}{n-1} \right) D_S \right)^{n-3} = (-1)^{n-3} (n-2)^{n-4} \sum_Q (-1)^{|Q|+1} (|Q|-3)! \prod_{B \in Q} \max(0, 1 - \sum_{i \in B} \mu_i)^{|B|-1}.$$

Bien que notre formule et celle de McMullen calculent le même volume, elles sont en fait de natures très différentes et peuvent être vues comme complémentaires.

Notre approche nous a également permis de faire le lien entre le volume de $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}^\mu$ et les objets algébro-géométriques considérés par Y. Kawamata [49]. Plus précisément, lorsque tous les poids dans (μ_1, \dots, μ_n) sont des rationnels, on peut montrer que Ω_μ représente la première classe de Chern d'un \mathbb{Q} -fibré en droites $\hat{\mathcal{L}}_\mu$ sur $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}$ dont la restriction à $\mathfrak{M}_{0,n}$ est isomorphe à \mathcal{L} .

En simplifiant une construction de Y. Kawamata [49], nous avons obtenu des sections globales explicites σ de $\hat{\mathcal{L}}_\mu$ (plus précisément, σ est une section d'une puissance de $\hat{\mathcal{L}}_\mu$) dont on peut calculer facilement le lieu des zéros D_σ , qui est toujours inclus dans $\cup_{S \in \mathcal{P}} D_S$. Comme D_σ représente également la première classe de Chern de $\hat{\mathcal{L}}_\mu$, on obtient

$$\int_{\mathfrak{M}_{0,n}} \Omega_\mu^{n-3} = D_\sigma^{n-3}.$$

Cette observation nous a permis de prouver une variété de formules pour le calcul de $\text{Vol}(\mathfrak{M}_{0,n}, \Omega_\mu)$. En particulier, nous avons

Théorème xviii (Koziarz-N.[54]). *Soit $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)$ une famille de réels positifs tels que $0 < \mu_s < 1$ et $\mu_1 + \dots + \mu_n = 2$. Pour tous $1 \leq s < s' \leq n$, posons*

$$\lambda(s, s') = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{k=s}^{s'} \mu_k \leq 1 \text{ ou } \sum_{k=s+1}^{s'-1} \mu_k \geq 1, \\ \min\{\mu_s, \mu_{s'}, \sum_{k=s}^{s'} \mu_k - 1, 1 - \sum_{k=s+1}^{s'-1} \mu_k\} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\delta_S(s, s') = \begin{cases} 1 & \text{si } \{s, s'\} \subset I_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors, le \mathbb{R} -diviseur effectif

$$D_\sigma := \sum_{\mathcal{S}} \sum_{1 \leq s < s' \leq n} \delta_{\mathcal{S}(s, s')} \lambda(s, s') D_{\mathcal{S}}$$

satisfait

$$\int_{\mathfrak{M}_{0,n}} \Omega_\mu^{n-3} = D_\sigma^{n-3}.$$

Notons que Théorème xviii est valable pour toute famille de poids réels, et non seulement pour les poids rationnels. De plus, on pourrait envisager de généraliser cette méthode pour calculer le volume des espaces de surfaces plates dont certains angles coniques sont supérieurs à 2π . Dans cette situation, la fonction l'aire ne donne plus une métrique sur l'espace de modules. Néanmoins il est toujours possible de définir une forme volume « naturelle » sur ces espaces dont le volume total reste fini (voir [99, 87]).

RÉFÉRENCES

- [1] P. Apisa : $GL_2(\mathbb{R})$ -orbit closures in hypereuclidean components of strata, prépublication, arXiv :1508.05438.
- [2] E. Arbarello, M. Cornalba, et P.A. Griffiths : Geometry of Algebraic curves Vol. II, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 268, Springer, (2011).
- [3] P. Arnoux : Un invariant pour les échanges d'intervalles et les flots sur les surfaces, *Thèse, Université de Reims* (1981).
- [4] D. Auricino et D.-M. Nguyen : Rank two affine submanifolds in $\mathcal{H}(3,1)$ and $\mathcal{H}(2,2)$, à paraître dans *Geometry & Topology*, arXiv :1501.033303.
- [5] D. Auricino, D.-M. Nguyen, et A. Wright : Classification of higher rank orbit closures in $\mathcal{H}^{\text{odd}}(4)$, à paraître dans *Journal of the European Mathematical Society*, arXiv :1308.5879 (2013).
- [6] A. Avila, A. Eskin, et M. Möller : Symplectic and Isometric $SL(2, \mathbb{R})$ -invariant subbundle of the Hodge bundle, à paraître dans *J. Reine Angew. Math.*, arXiv :1209.2854 (2012).
- [7] A. Avila et P. Hubert : Recurrence for the wind-tree model, à paraître dans *Ann. Inst. Henri Poincaré-Analyse non-linéaire*.
- [8] A. Avila et M. Resende : Exponential mixing for the Teichmüller flow on the moduli space of quadratic differentials, *Comment. Math. Helv.* **87** (2012), no.3, pp. 589-638.
- [9] M. Bainbridge : Euler characteristics of Teichmüller curves in genus two, *Geometry & Topology* **11** (2007), pp. 1887–2073.
- [10] M. Bainbridge : Billiards in L-shaped tables with barriers, *Geom. Funct. Anal.* **20** (2010) no.2, 299–356.
- [11] M. Bainbridge et M. Möller : Deligne Mumford compactification of the real multiplication locus and Teichmüller curves in genus three, *Acta Math.* **208** (2012), pp. 1-92.
- [12] M. Bainbridge, P. Habegger et M. Möller : Teichmüller curves in genus three are just likely intersections in $G_m^n \times G_a^n$, arXiv :1410.6835 (2014).
- [13] M. Bainbridge, D. Chen, Q. Gendron, S. Grushevsky, M. Möller : Compactification of strata of Abelian differentials, prépublication, arXiv :1604.08834 (2016).
- [14] C. Boissy et E. Lanneau : Dynamics and geometry of the Rauzy-Veech induction for quadratic differentials, *Erg. Th. Dyn. Sys.* **29** (2009), pp. 767-816.
- [15] M. Boshernitzan : Rank two interval exchange transformations, *Erg. Th. Dyn. Sys.* **8** (1988), pp. 379-394.
- [16] G. Calsamiglia, B. Deroin et S. Francaviglia : A transfer principle : from periods to isoperiodic foliation, prépublication, arXiv :1511.07635 (2015).
- [17] K. Calta : Veech surfaces and complete periodicity in genus two, *J. Amer. Math. Soc.*, **17**, No. 4, 871-908 (2004).
- [18] K. Calta et J. Smillie : Algebraically periodic translation surfaces, *J. Mod. Dyn.* **2**(2007), no.2, pp. 209-248.
- [19] D. Chen et M. Möller : Non-varying sums of Lyapunov exponents of Abelian differentials in low genus, *Geometry & Topology* **12** (2012), pp. 101–154.
- [20] D. Chen et M. Möller : Quadratic differentials in low genus : exceptional and non-varying strata, *Ann. Sci. E.N.S.* **47**, No. 2 (2014), pp. 309–369.
- [21] Y. Cheung, P. Hubert, et H. Masur : Topological dichotomy and strict ergodicity for translation surfaces, *Erg. Th. Dyn. Sys.* **28** (2008), no.6, pp. 1729–1748.
- [22] C. Danthony et A. Nogueira : Involutions linéaires et feuilletages mesurés, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307** (1988), no. 8, pp. 409–412.

- [23] V. Delecroix, P. Hubert, et S. Lelièvre : Diffusion for the periodic wind-tree model, *Ann. Sci. de l'E.N.S* **47** :6 (2014), 1085–1110.
- [24] V. Delecroix et A. Zorich : Cries and whispers in wind-tree forests, arXiv :1502.06405 .
- [25] P. Deligne et G. D. Mostow : Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, *Publ. Math. I.H.É.S*, No. 63 (1986), pp. 5–89
- [26] P. Deligne et G. D. Mostow : Commensurabilities among lattices in $PU(1, n)$, *Annals of Mathematics Studies* 132, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1993).
- [27] P. Deligne et D. Mumford : The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. I.H.É.S*, No. 36 (1969), pp. 75–109.
- [28] J.-P. Demailly : Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory. *Complex analysis and geometry*, pp. 115–193, Univ. Ser. Math., Plenum, New York, 1993
- [29] J.-P. Demailly : Complex analytic and algebraic geometry, disponible sur la page-web de J.-P. Demailly
- [30] A. Eskin, H. Masur, et A. Zorich : Moduli spaces of abelian differentials : The principal boundary, counting problems, and the Siegel-Veech constants, *Publ. Math. I.H.É.S* No. **97**, 61-179 (2003).
- [31] A. Eskin, M. Kontsevich, et A. Zorich : Sum of Lyapunov exponents of the Hodge bundle with respect to the Teichmüller geodesic flow, *Publ. Math. I.H.É.S.* **120** (2014), pp. 207–333.
- [32] A. Eskin et M. Mirzakhani : Invariant and stationary measures for the $SL(2, \mathbb{R})$ action on moduli space, arXiv :1302.3320 (2013).
- [33] A. Eskin, M. Mirzakhani, et A. Mohammadi : Isolation, Equidistribution, and Orbit Closures for the $SL(2, \mathbb{R})$ action on Moduli space, *Annals of Math.* **182** (2015), no.2, pp. 673–721.
- [34] S. Filip : Semisimplicity and Rigidity of the Kontsevich-Zorich Cocycles, à paraître dans *Invent. Math.*, arXiv :1307.7314 (2013).
- [35] S. Filip : Splitting mixed Hodge structures over affine invariant manifolds, *Annals of Math.* **183** (2016), no.2, pp. 681-713.
- [36] E. Gutkin, P. Hubert, et T. Schmidt : Affine diffeomorphisms of translation surfaces : periodic points, Fuchsian groups, and arithmeticity, *Ann. Sci. E.N.S. (4)* **36** (2003), no.6, pp. 847-866.
- [37] E. Gutkin et C. Judge : Affine mappings of translation surfaces : geometry and arithmetic, *Duke Math. J.* **103** (2000), no.2, pp. 191–213.
- [38] U. Hamenstädt : Typical properties of periodic Teichmüller geodesics, arXiv :1409.5978.
- [39] U. Hamenstädt : Dynamical properties of the absolute period foliation, arXiv :1511.08055.
- [40] J. Harris et I. Morrison : Moduli of Curves, *Grad. Texts in Math.* 187, Springer-Verlag, New York 1998.
- [41] P. Hooper et B. Weiss : Rel leaves of the Arnoux-Yoccoz surfaces, prépublication, arXiv :1508.05363 (2015).
- [42] P. Hubert, E. Lanneau, et M. Möller : The Arnoux-Yoccoz Teichmüller disc, *Geom. Funct. Anal.*, **18**, No. 6, 1988-2016 (2009).
- [43] P. Hubert, E. Lanneau, et M. Möller : Completely periodic directions and orbit closure of many pseudo-Anosov Teichmüller discs in $\mathcal{Q}(1, 1, 1, 1)$, *Math. Ann.* **353** (2012), 1-35 arXiv :0611.655.
- [44] P. Hubert et S. Lelièvre : Noncongruence subgroups in $H(2)$, *Int. Math. Res. Not.* **2005** :1 (2005), pp. 47–64.
- [45] P. Hubert et S. Lelièvre : Prime arithmetic Teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$, *Israel J. of Math.* **151** (2006), pp. 281–321.
- [46] P. Hubert, S. Lelièvre et S. Troubetzkoy : The Ehrenfest wind-tree model : periodic directions, recurrence, diffusion, *J. Reine Angew. Math.* **656** (2011), pp. 223–244.

- [47] P. Hubert et T. Schmidt : Infinitely generated Veech groups, *Duke Math. J.* **123** (2004), no.1, pp. 49-69.
- [48] A. Kappes et M. Möller : Lyapunov spectrum of ball quotients and applications to commensurability questions, à paraître dans *Duke Math. J.* (2015), arXiv :1207.5433.
- [49] Y. Kawamata : Subadjunction of log canonical divisors for a subvariety of codimension 2, *Contemporary Math.* **207** (1997), pp. 79–88.
- [50] S. Keel : Intersection theory of Moduli Space of Stable N -pointed curves of genus zeros, *Trans. Amer. Math. Soc.* **330** (1992), pp. 545–574
- [51] R. Kenyon et J. Smillie : Billiards on rational-angled triangles, *Comment. Math. Helv.* **75** (2000) pp. 65–108.
- [52] F. F. Knudsen : The projectivity of the moduli space of stable curves II ; III, *Math. Scand.* **52** (1983), 161–199 ; 200–212
- [53] M. Kontsevich et A. Zorich : Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials, *Invent. Math.* **153** :3 (2003), pp. 631-678.
- [54] V. Koziarz et D.-M. Nguyen : Complex hyperbolic volume and Intersections of boundary divisors in moduli space of genus zero curves, prépublication, arXiv :1601.05252 (2016).
- [55] E. Lanneau : Connected components of the strata of th moduli spaces of quadratic differentials with prescribed singularities, *Ann. Sci. E.N.S.* **41** (2008), pp. 1–56.
- [56] E. Lanneau et D.-M. Nguyen : Teichmueller curves generated by Weierstrass Prym eigenforms in genus three and genus four, *Journal of Topology* **7** (2) (2014), pp. 475-522.
- [57] E. Lanneau et D.-M. Nguyen : Complete periodicity of Prym eigenforms, *Ann. Sci. E.N.S.* **49** :1 (2016), pp. 87–130.
- [58] E. Lanneau et D.-M. Nguyen : $GL^+(2, \mathbb{R})$ -orbits in Prym eigenform loci, à paraître dans *Geometry & Topology*, arXiv :1310.8537 (2013).
- [59] E. Lanneau et D.-M. Nguyen : Components of Prym eigenform loci in genus 3, prépublication, arXiv :1408.1064 (2014).
- [60] E. Lanneau et D.-M. Nguyen : Classification of $GL(2, \mathbb{R})$ -orbits of Prym eigenforms in $\mathcal{H}(6)$, en préparation.
- [61] E. Lanneau, D.-M. Nguyen, et A. Wright : Finiteness of Teichmüller curves in non-arithmetic rank one orbit closures, prépublication, arXiv :1504.03742.
- [62] H. Masur : Interval exchange transformations and measured foliations. *Ann. of Math.* **115** :1 (1982), pp.169–200.
- [63] H. Masur et J. Smillie : Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations, *Ann. of Math.* (2) **134** (1991), no. 3, pp. 455–543.
- [64] H. Masur et S. Tabachnikov : Rational billiards and flat structures, *Handbook of dynamical systems, 1A*, North-Holland, Amsterdam (2002), pp. 1015–1089.
- [65] H. Masur et A. Zorich : Multiple saddle connections on flat surfaces and the boundary principle of the moduli space of quadratic differentials, *Geom. Funct. Anal.* **18**, no. 3, pp. 919-987 (2008).
- [66] C. Matheus et A. Wright : Hodge-Teichmüller planes and finiteness results for Teichmüller curves, *Duke Math. J.* **164** (2015), no. 6, pp. 1041-1077.
- [67] C. McMullen : Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 4, pp. 857–885.
- [68] C. McMullen : Teichmüller geodesics of infinite complexity, *Acta Math.* **191** (2003), no. 2, pp. 191–223.

- [69] C. McMullen : Teichmüller curves in genus two : Discriminant and spin, *Math. Annalen* **333** (2005), pp. 87–130.
- [70] C. McMullen : Teichmüller curves in genus two : The decagon and beyond, *Journ. die Reine und Angew. Math.* **582** (2005), pp. 173–200.
- [71] C. McMullen : Teichmüller curves in genus two : Torsion divisors and ratios of sines, *Invent. Math.* **165** (2006), pp. 651–672.
- [72] C. McMullen : Prym variety and Teichmüller curves, *Duke Math. J.* **133**, 569-590 (2006).
- [73] C. McMullen : Dynamics of $SL_2(\mathbb{R})$ over moduli space in genus two, *Ann. of Math.*, **165** No.2, 397-456 (2007).
- [74] C. McMullen : Cascades in the dynamics of measured foliations, *Ann. Sci. l'E.N.S.* **48** no.1 (2015), pp. 1–39.
- [75] C. McMullen : The Gauss-Bonnet theorem for cone manifolds and volumes of moduli spaces, prépublication (2013).
- [76] C. McMullen, R. Mukamel, et A. Wright : Cubic curves and totally geodesic subvarieties of moduli space, prépublication (2016).
- [77] Y. Minsky et B. Weiss : Non-divergence of horocyclic flows on moduli space, *J. Reine Angew. Math.* **552** (2002), pp. 131-177.
- [78] M. Mirzakhani et A. Wright : The boundary of an invariant submanifold, arXiv :1508.01446 (2015).
- [79] M. Möller : Periodic points on Veech surfaces and the Mordell-Weil group over a Teichmüller curve, *Invent. Math.* **165** No. 3 (2006), pp. 633-649.
- [80] M. Möller : Finiteness results for Teichmüller curves, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **58** (2008), no.1, pp. 63–83.
- [81] M. Möller : Linear manifolds in the moduli space of one-forms, *Duke Math. J.* **144**, No.3 (2008), pp. 447-488.
- [82] M. Möller : Prym covers, theta functions and Kobayashi geodesics in Hilbert modular surfaces, *Amer. J. of Math.* **136** no.4 (2014), pp. 995-1021.
- [83] G.D. Mostow : Generalized Picard lattices arising from half-integral conditions, *Publ. Math. I.H.É.S.* **63** (1986), pp. 91–106.
- [84] R. Mukamel : Orbifold points on Teichmüller curves and Jacobians with complex multiplication, *Geometry & Topology* **18** (2014), pp. 779–829.
- [85] D.-M. Nguyen : Triangulations and volume form on moduli spaces of flat surfaces, *Geom. Funct. Anal.* **20** (2010), no.1, pp. 192–228.
- [86] D.-M. Nguyen : Parallelogram decompositions and generic surfaces in $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$, *Geometry & Topology* **15** (2011), pp. 1707-1747.
- [87] D.-M. Nguyen : Energy functions on moduli spaces of flat surfaces with erasing forest, *Math. Ann.* **353** (2012), no.3, 997–1036.
- [88] D.-M. Nguyen : On the topology of $\mathcal{H}(2)$, *Groups, Geometry, and Dynamics* **8** (2014), pp. 513-551.
- [89] D.-M. Nguyen : Translation surfaces and the curve graph in genus two, prépublication, arXiv :1506.05966.
- [90] D.-M. Nguyen et A. Wright : Non-Veech surfaces in $\mathcal{H}^{\text{hyp}}(4)$ are generic, *Geom. Funct. Anal.* **24** (2014), pp. 1316-1335.
- [91] J.R. Parker : Complex hyperbolic lattices, *Discrete Groups and Geometric Structures, Contemporary Mathematics* **501** AMS (2009), pp. 1-42.

- [92] J. K. Sauter : Isomorphisms among monodromy groups and applications to lattices in $PU(1, 2)$, *Pacific J. Math.* **146** (1990), pp. 331–384.
- [93] J. Smillie et B. Weiss : Minimal sets for flows on moduli space, *Israel J. Math.* **142** (2004), pp. 149–160.
- [94] W.P. Thurston : Shapes of polyhedra, *Geom. & Top. Monogr.*, Vol. 1 : The Epstein birthday schrift, pp. 511–549, Geom. Topol. Publ., Coventry (1998).
- [95] D. Torres-Teigell et J. Zachhuber : Orbifold points on Prym-Teichmüller curves in genus three, prépublication, arXiv :1502.05381.
- [96] M. Troyanov : Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities, *Trans. Amer. Math. Soc.* **324** :2 (1991), pp. 793–821.
- [97] W.A. Veech : Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Ann. of Math.* **115** (1982), no. 1, pp. 201–242.
- [98] W.A. Veech : Moduli spaces of quadratic differentials, *Journal d'Analyse Math.* **55** (1990), pp. 117–171.
- [99] W.A. Veech : Flat surfaces, *Amer. J. Math.* **115** (1993), no.3, pp. 589–689.
- [100] A. Wright : The field of definition of affine invariant submanifolds of the moduli space of abelian differentials, *Geometry & Topology* **18** (2014), pp. 1323–1341.
- [101] A. Wright : Cylinder deformations in orbit closures of translation surfaces, *Geometry & Topology* **19** (2015), pp. 413–438.
- [102] J.-C. Yoccoz : Échange d'Intervalles, *Cours Collège de France* (2005) (disponible sur le site de Collège de France).
- [103] M. Yoshida : Volume formula for certain discrete reflection groups in $PU(2, 1)$, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* **36** (1982), pp. 1–11.
- [104] A. Zorich : Flat surfaces, *Frontiers in number theory, physics, and geometry*, Springer, Berlin (2006), pp. 437–583.
- [105] D. Zvonkine : An introduction to moduli spaces of curves and their intersection theory. Handbook of Teichmüller theory. Volume III, pp. 667–716, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 17, Eur. Math. Soc., Zürich, 2012