

# GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE (LICENCE 2<sup>ème</sup> ANNÉE)

OLIVIER BRINON

## TABLE DES MATIÈRES

1. Espaces affines réels de dimension finie	1
1.1. Espaces affines réels	1
1.3. Barycentres	3
1.4. Sous-espaces affines	4
1.6. Applications affines	7
1.11. Un exemple : le théorème de Thalès	12
1.12. Convexité	13
2. Espaces affines euclidiens de dimension finie	15
2.1. Rappels sur les espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie)	15
2.4. Espaces affines euclidiens	20
3. Nombres complexes et géométrie	26
3.1. Compléments sur les nombres complexes	26
3.2. Le plan complexe	28
4. Figures de base dans le plan	32
4.1. Le triangle	32
4.2. Les coniques	35
4.3. Polygones réguliers et sous-groupes finis d'isométries du plan	41
5. Compléments	42
5.1. Le théorème fondamental de la géométrie affine	42

*La référence pour ce cours est : Michèle Audin, Géométrie, EDP Sciences.*

Dans l'intitulé du cours, « élémentaire » signifie qu'on étudie des figures « simples » comme des droites plans, polygones, polyèdres, coniques, *etc*, ce qui ne signifie pas « facile » pour autant.

On va étudier la géométrie affine réelle et la géométrie euclidienne réelle. On fera de la géométrie du Lycée, mais d'un point de vue plus moderne, en utilisant l'algèbre linéaire.

## 1. ESPACES AFFINES RÉELS DE DIMENSION FINIE

1.1. **Espaces affines réels.** Lorsqu'on fait de la géométrie, on manipule des points et des vecteurs (ce n'est pas la même chose...) La notion suivante enrichit celle d'espace vectoriel en ce sens.

**Définition 1.1.1.** Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel<sup>a</sup>. Un *espace affine* de direction  $E$  est la donnée d'un ensemble  $\mathcal{E}$  *non vide* et d'une application

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \times E &\rightarrow \mathcal{E} \\ (a, \vec{x}) &\mapsto a + \vec{x}\end{aligned}$$

telle que

- (i)  $(\forall a \in \mathcal{E}) a + \vec{0} = a$  ;
- (ii)  $(\forall a \in \mathcal{E}) (\forall \vec{x}, \vec{y} \in E) (a + \vec{x}) + \vec{y} = a + (\vec{x} + \vec{y})$  ;
- (iii)  $(\forall a, b \in \mathcal{E}) (\exists! \vec{x} \in E) b = a + \vec{x}$ .

Les éléments de  $\mathcal{E}$  s'appellent des *points*.

<sup>a</sup>. Une grande partie de ce qui suit se généralise à des espaces vectoriels sur des corps quelconques.

**Remarque.** (a) Dans cette définition, on a commis l'abus (systématique par la suite) de noter de la même façon la loi d'addition de  $E$  et l'application  $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$ . Il est toutefois important de ne pas les confondre.

- (b) L'espace vectoriel  $E$  n'est qu'une partie de la donnée de l'espace affine  $\mathcal{E}$ .
- (c) On ne peut *pas* additionner les points.

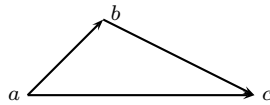
**Notation.** (1) Si  $a, b \in \mathcal{E}$ , l'unique vecteur  $\vec{x}$  tel que  $b = a + \vec{x}$  se note  $\vec{ab}$ , voire  $b - a$ .  
(2) Si  $\vec{x} \in E$ , on pose

$$\begin{aligned}\tau_{\vec{x}} : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ a &\mapsto a + \vec{x}\end{aligned}$$

c'est la translation de vecteur  $\vec{x}$ . C'est une bijection de  $\mathcal{E}$  dans lui-même (et on a  $\tau_{\vec{x}}^{-1} = \tau_{-\vec{x}}$ ).

**Proposition 1.1.2.** Si  $a, b, c \in \mathcal{E}$ , on a :

- (1)  $\vec{aa} = \vec{0}$  ;
- (2)  $\vec{ba} = -\vec{ab}$  ;
- (3)  $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$  (règle de *Chasles*).



*Démonstration.* (1)  $\vec{aa}$  est l'unique (cf (iii)) vecteur  $\vec{x} \in E$  tel que  $a + \vec{x} = a$ , c'est donc  $\vec{0}$  en vertu du point (i).

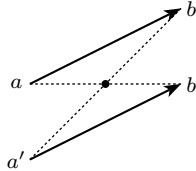
(2) D'après (ii) on a  $b + (\vec{ba} + \vec{ab}) = (b + \vec{ba}) + \vec{ab} = a + \vec{ab} = b = b + \vec{0}$ , de sorte que  $\vec{ba} + \vec{ab} = \vec{0}$  d'après (iii), et donc  $\vec{ba} = -\vec{ab}$ .

(3) D'après (ii) on a  $a + (\vec{ab} + \vec{bc}) = (a + \vec{ab}) + \vec{bc} = b + \vec{bc} = c = a + \vec{ac}$ , de sorte que  $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$  d'après (iii).  $\square$

**Exemple 1.2.** (1) Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. On peut le munir (canoniquement) d'une structure d'espace affine sur lui-même grâce à sa loi d'addition. Cet exemple est un peu déroutant, puisque les éléments de  $E$  sont vus à la fois comme des points et comme des vecteurs.

- (2) Soient  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $a \in E$ . Alors  $a + F = \{a + \vec{x}, \vec{x} \in F\}$  est un espace affine de direction  $F$  (c'est la situation qu'on rencontre dans la pratique).

- (3) Soit  $\mathcal{P}$  le plan (celui du lycée). Un *bipoint* est un couple  $(a, b)$  de points de  $\mathcal{P}$ . Deux bipoints  $(a, b)$  et  $(a', b')$  sont dit *équipollents* (et on note  $(a, b) \sim (a', b')$ ) si  $[ab']$  et  $[a'b]$  ont même milieu, soit encore si  $abb'a'$  est un parallélogramme. C'est une relation d'équivalence (exercice facile). Si  $E = \mathcal{P} \times \mathcal{P} / \sim$  désigne l'ensemble quotient, il est facile (bien qu'un peu fastidieux) de montrer que  $E$  est naturellement un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel (de dimension 2), et que  $\mathcal{P}$  est un espace affine réel de direction  $E$ . Bien entendu, le vecteur  $\vec{ab}$  n'est autre que la classe du bipoint  $(a, b)$ .



- (4) L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaire avec second membre est un espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée.
- (5) Dans le même ordre d'idées, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  est un espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène associée.

**Définition 1.2.1.** (Vectorialisation d'un espace affine) Soient  $\mathcal{E}$  un espace affine réel de direction  $E$  et  $a \in \mathcal{E}$ . L'application

$$\begin{aligned} \Theta_a: \mathcal{E} &\rightarrow E \\ b &\mapsto \vec{ab} \end{aligned}$$

est une bijection (par définition). Par transport de structure, il permet de munir  $\mathcal{E}$  d'une structure de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, isomorphe à  $E$ . Bien entendu, cet isomorphisme et la structure de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel qui s'en déduit dépendent du choix de  $a$  : en général il n'y a pas de structure *naturelle* d'espace vectoriel sur  $\mathcal{E}$ .

**Définition 1.2.2.** La *dimension* de l'espace affine  $\mathcal{E}$  est  $\dim_{\mathbf{R}}(E) \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ . Les espaces affines de dimension 0 sont réduits à un point. On parle de *droite* (resp. de *plan*) affine.

**Définition 1.2.3.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine de direction  $E$ . Un *repère* de  $\mathcal{E}$  est la donnée d'un couple  $\mathfrak{B} = (\omega, (\vec{e}_i)_{i \in I})$  où  $\omega \in \mathcal{E}$  (l'*origine* du repère) et  $(\vec{e}_i)_{i \in I}$  est une base du  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $E$ . Pour tout point  $m \in \mathcal{E}$ , il existe  $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{R}^{(I)}$  unique tel que  $\vec{\omega m} = \sum_{i \in I} \lambda_i \vec{e}_i$ , i.e.  $m = \omega + \sum_{i \in I} \lambda_i \vec{e}_i$ . La famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  s'appelle les *coordonnées cartésiennes* de  $m$  dans le repère  $\mathfrak{B}$ .

1.3. **Barycentres.** Dans tout ce paragraphe,  $\mathcal{E}$  est un espace affine réel de direction  $E$ .

Soient  $n \in \mathbf{N}_{>0}$  et  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$  des points affectés de coefficients (c'est-à-dire  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ ). On leur associe l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{E} &\rightarrow E \\ a &\mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{aa}_i \end{aligned}$$

Pour  $a, b \in \mathcal{E}$ , on a  $\varphi(a) - \varphi(b) = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \vec{ab}$ . Il y a deux cas :

- Si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ , alors  $\varphi$  est constante.

- Si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ , alors  $\varphi$  est bijective.

**Définition 1.3.1.** Avec les notations qui précèdent, si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ , il existe donc un unique point  $g \in \mathcal{E}$  tel que  $\varphi(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{g a_i} = \vec{0}$ . On l'appelle le *barycentre* de  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$ . On le note

$$\text{Bar}((a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n))$$

En fixant une origine  $\omega \in \mathcal{E}$  (ce qui permet de vectorialiser  $\mathcal{E}$ ), on peut déterminer  $g$  grâce à la formule  $\varphi(\omega) = \varphi(\omega) - \varphi(g) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \overrightarrow{\omega g}$ , de sorte que

$$(*) \quad \overrightarrow{\omega g} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{\omega a_i}$$

**Proposition 1.3.2.** Soient  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$  des points affectés de coefficients tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ .

(1) (*Homogénéité*) Si  $\lambda \in \mathbf{R}^\times$ , alors

$$\text{Bar}((a_1, \lambda \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda \lambda_n)) = \text{Bar}((a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n))$$

(2) (*Associativité*). Soit  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  tel que  $\sum_{i=1}^p \lambda_i \neq 0$  et  $\sum_{i=p+1}^n \lambda_i \neq 0$ . On pose  $g_1 = \text{Bar}((a_1, \lambda_1), \dots, (a_p, \lambda_p))$  et  $g_2 = \text{Bar}((a_{p+1}, \lambda_{p+1}), \dots, (a_n, \lambda_n))$ . alors

$$\text{Bar}((a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)) = \text{Bar}\left(\left(g_1, \sum_{i=1}^p \lambda_i\right), \left(g_2, \sum_{i=p+1}^n \lambda_i\right)\right)$$

*Démonstration.* (1) résulte immédiatement de la formule (\*).

Pour (2), posons  $g = \text{Bar}((a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n))$ . On a

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{g a_i} = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{g a_i}\right) + \left(\sum_{i=p+1}^n \lambda_i \overrightarrow{g a_i}\right) \stackrel{(*)}{=} \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i\right) \overrightarrow{g g_1} + \left(\sum_{i=p+1}^n \lambda_i\right) \overrightarrow{g g_2}$$

ce qui équivaut à l'égalité annoncée.  $\square$

**Notation.** Lorsque  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  et **seulement dans ce cas**, on écrit  $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ .

1.4. **Sous-espaces affines.** Dans tout ce paragraphe,  $\mathcal{E}$  est un espace affine réel de direction  $E$ .

1.4.1. *Définition, premières propriétés.*

**Définition 1.4.2.** Une partie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  est un *sous-espace affine* si elle est non vide et stable par barycentre, *i.e.* pour tout système  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$  de points affectés de coefficients tels que  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{F}$  et  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ , on a encore  $\text{Bar}((a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)) \in \mathcal{F}$ .

**Exemple 1.5.**  $\mathcal{E}, \{a\}$  pour  $a \in \mathcal{E}$ .

**Proposition 1.5.1.** (1) Si elle est non vide, l'intersection d'une famille de sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ .

(2) Si  $A \neq \emptyset$  est une partie de  $\mathcal{E}$ , il existe un plus petit sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  qui contient  $A$ . On l'appelle le sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  engendré par  $A$ .

*Démonstration.* (1) Soient  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  une famille de sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ . Soient  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$  un système de points affectés de coefficients tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{F}$ , et  $g = \text{Bar}((a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n))$ . Pour  $i \in I$ , on a  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_i$ , donc  $g \in \mathcal{F}_i$ . Comme c'est vrai pour tout  $i \in I$ , on a  $g \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ .

(2) C'est l'intersection de tous les sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  qui contiennent  $A$ .  $\square$

**Définition 1.5.2.** Si le sous-espace affine engendré par une partie  $A \subset \mathcal{E}$  est  $\mathcal{E}$  en entier, on dit que  $A$  est *affinement génératrice*. Cela signifie que tout point de  $\mathcal{E}$  peut s'écrire (pas de façon unique) comme un barycentre d'éléments de  $A$ .

**Théorème 1.5.3.** Soit  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  non vide. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  ;
- (ii)  $(\exists a \in \mathcal{F}) \{\overrightarrow{am}, m \in \mathcal{F}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  ;
- (iii)  $(\forall a \in \mathcal{F}) \{\overrightarrow{am}, m \in \mathcal{F}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Si  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ , alors le sous-espace vectoriel  $F := \{\overrightarrow{am}, m \in \mathcal{F}\}$  de  $E$  est indépendant de  $a$ , et l'application  $\mathcal{F} \times F \rightarrow F$  induite par  $\mathcal{E} \times E \rightarrow \mathcal{E}$  définit sur  $\mathcal{F}$  une structure d'espace affine réel de direction  $F$ .

*Démonstration.* On a bien sûr (iii) $\Rightarrow$ (ii). Supposons (ii) : soient  $a$  tel que

$$F_a := \{\overrightarrow{am}, m \in \mathcal{F}\} \subset E$$

soit un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soit  $(a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n)$  un système de points affectés de coefficients tel que  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{F}$  et  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Posons  $g = \text{Bar}((a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n))$ . On a

$$\overrightarrow{ag} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{aa_i} \in F_a$$

parce que  $(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \overrightarrow{aa_i} \in F_a$  et  $F_a$  est stable par combinaisons linéaires. On a donc  $g \in \mathcal{F}$  par définition de  $F_a$ , et  $\mathcal{F}$  est stable par barycentres : c'est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ .

Supposons (i), et soit  $a \in \mathcal{F}$  (il en existe vu que  $\mathcal{F}$  est supposé non vide). Comme précédemment, posons  $F_a = \{\overrightarrow{am}, m \in \mathcal{F}\} \subset E$ . Montrons que  $F_a$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Soient  $\vec{x}, \vec{y} \in F_a$  : il existe  $b, c \in \mathcal{F}$  tels que  $\vec{x} = \overrightarrow{ab}$  et  $\vec{y} = \overrightarrow{ac}$ . Soient  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ . Montrons que  $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F_a$ . Soit  $g = (1 - \lambda - \mu)a + \lambda b + \mu c \in \mathcal{F}$  le barycentre de  $((a, 1 - \lambda - \mu), (b, \lambda), (c, \mu))$ . On a alors  $g = a + \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$  de sorte que  $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \overrightarrow{ag} \in F_a$  : on a montré (iii).

Supposons que  $\mathcal{F}$  soit un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ . Soient  $a_1, a_2 \in \mathcal{F}$  : on dispose des sous-espaces vectoriels  $F_{a_1}$  et  $F_{a_2}$  de  $E$ . Si  $\vec{x} \in F_{a_1}$ , il existe  $m \in \mathcal{F}$  tel que  $\vec{x} = \overrightarrow{a_1 m}$ . On a alors  $\vec{x} = \overrightarrow{a_2 m} - \overrightarrow{a_2 a_1} \in F_{a_2}$  parce que  $a_1, m \in \mathcal{F}$ . On a donc  $F_{a_1} \subset F_{a_2}$ . Par symétrie, on a aussi l'inclusion inverse, et  $F_{a_1} = F_{a_2}$ .  $\square$

**Remarque.** (1) Il résulte du théorème que les sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  sont les parties de la forme  $\mathcal{F} = a + F$  où  $a \in \mathcal{E}$  et  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (c'est alors la direction de  $\mathcal{F}$ ).

(2) Si  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ , le sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  engendré par  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  n'est autre que  $a_0 + V$  où  $V = \text{Vect}(\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n}) \subseteq E$ .

**Définition 1.5.4.** (1) On dit que  $n + 1$  points  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$  sont *affinement indépendants* lorsque le sous-espace affine engendré par  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  est de dimension  $n$ . Cela équivaut au fait que la famille de vecteurs  $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n}\}$  est libre dans  $E$ .

(2) Si  $\mathcal{E}$  est de dimension  $n$ , une *base affine* de  $\mathcal{E}$  est une famille de  $n + 1$  points affinement indépendants de  $\mathcal{E}$ .

**Remarque.** Si  $\{a_0, \dots, a_n\}$  est une base affine de  $\mathcal{E}$ , alors  $(a_0, (\overrightarrow{a_0a_i})_{1 \leq i \leq n})$  est un repère (cartésien).

**Théorème 1.5.5.** Supposons  $\mathcal{E}$  de dimension  $n$  et soit  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  une base affine de  $\mathcal{E}$ . Alors pour tout point  $m \in \mathcal{E}$ , il existe  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$  uniques tels que

$$m = \text{Bar}((a_0, \lambda_0), \dots, (a_n, \lambda_n)) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$$

*Démonstration.* Comme  $(\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n})$  est une base de  $E$ , il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$  uniques tels que

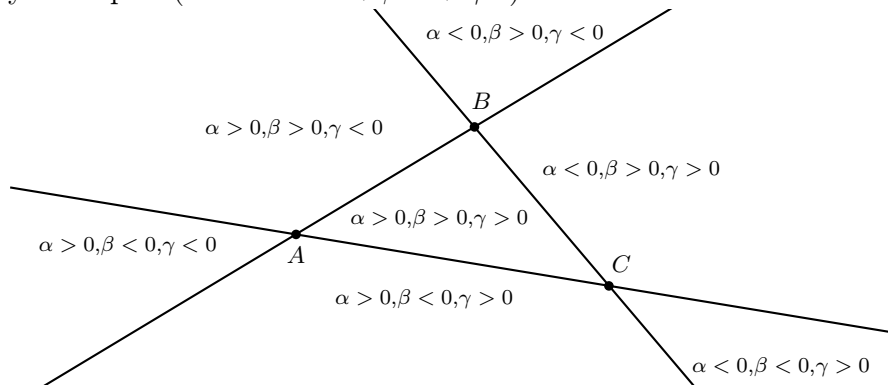
$$\overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{a_0a_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overrightarrow{a_0m} + \overrightarrow{ma_i})$$

de sorte que  $\sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{ma_i} = \vec{0}$  avec  $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . □

**Définition 1.5.6.** Les scalaires  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$  s'appellent les *coordonnées barycentriques* de  $m$  (dans la base affine  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ ).

**Remarque.** Les coordonnées cartésiennes de  $m$  dans le repère  $(a_0, (\overrightarrow{a_0a_i})_{1 \leq i \leq n})$  sont alors  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Le dessin suivant indique le partitionnement du plan suivant le signe des coordonnées barycentriques (ici  $M = \alpha A + \beta B + \gamma C$ ).



### 1.5.7. Parallélisme, intersections.

**Définition 1.5.8.** Soient  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$ , de directions  $F_1$  et  $F_2$  respectivement. On dit que :

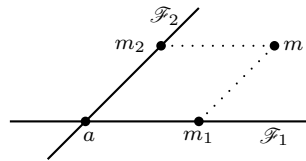
- (i)  $\mathcal{F}_1$  est *parallèle* à  $\mathcal{F}_2$  si  $F_1 \subset F_2$ ;
- (ii)  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont *parallèles* si  $F_1 = F_2$ .

**Théorème 1.5.9.** Soient  $\mathcal{F}_1 = a_1 + F_1$  et  $\mathcal{F}_2 = a_2 + F_2$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$ . Alors  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1 a_2} \in F_1 + F_2$ . Dans ce cas,  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  est un sous-espace affine de direction  $F_1 \cap F_2$ .

*Démonstration.* Si  $a \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ , on a  $\overrightarrow{a_1 a_2} = \overrightarrow{a_1 a} + \overrightarrow{a a_2} \in F_1 + F_2$ . Réciproquement, si  $\overrightarrow{a_1 a_2} \in F_1 + F_2$ , il existe  $\vec{x} = \overrightarrow{a_1 m_1} \in F_1$  et  $\vec{y} = \overrightarrow{a_2 m_2} \in F_2$  tels que  $\overrightarrow{a_1 a_2} = \vec{x} - \vec{y}$ , i.e.  $\overrightarrow{m_1 m_2} = \overrightarrow{m_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 a_2} + \overrightarrow{a_2 m_2} = \vec{0}$  soit  $m_1 = m_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  : ce dernier est non vide.

Si  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$ , soit  $a \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  : on a  $\mathcal{F}_1 = a + F_1$  et  $\mathcal{F}_2 = a + F_2$ , de sorte que  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = a + F_1 \cap F_2$ .  $\square$

**Théorème 1.5.10.** Soient  $\mathcal{F}_1 = a_1 + F_1$  et  $\mathcal{F}_2 = a_2 + F_2$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  tels que  $F_1 \oplus F_2 = E$ . Alors  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  est un singleton  $\{a\}$ , et pour tout point  $m \in \mathcal{E}$ , il existe  $m_1 \in \mathcal{F}_1$  et  $m_2 \in \mathcal{F}_2$  uniques tels que  $\overrightarrow{a m} = \overrightarrow{a m_1} + \overrightarrow{a m_2}$ .



*Démonstration.* Comme  $F_1 \oplus F_2 = E$ , on a  $\overrightarrow{a_1 a_2} \in F_1 + F_2$ , de sorte que  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$  : soit  $a \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ . On a  $\mathcal{F}_1 = a + F_1$  et  $\mathcal{F}_2 = a + F_2$ , donc  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = a + F_1 \cap F_2 = \{a\}$ .  $\square$

**Définition 1.5.11.** Sous les hypothèses du théorème précédent,  $m_1$  s'appelle le *projeté* de  $m$  sur  $\mathcal{F}_1$  parallèlement à  $F_2$ .

**1.6. Applications affines.** Dans tout ce paragraphe,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  désignent des espaces affines réels de direction  $E$  et  $F$  respectivement. On se donne une application  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ .

1.6.1. *Définition, premières propriétés.*

**Définition 1.6.2.** L'application  $f$  est dite *affine* si pour tout  $n \in \mathbf{N}_{>0}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$  avec  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ , on a

$$f(\text{Bar}((a_1, \lambda_1), \dots, (a_n, \lambda_n))) = \text{Bar}((f(a_1), \lambda_1), \dots, (f(a_n), \lambda_n)))$$

Lorsqu'on se restreint aux coefficients tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , la condition qui précède s'écrit plus simplement

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i)$$

**Remarque.** Il résulte de la définition qu'une application affine conserve l'alignement. Le *théorème fondamental de la géométrie affine* fournit une réciproque partielle :  $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$ , toute application *bijective*  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  qui conserve l'alignement est affine.

**Notation.** On note  $\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$  l'ensemble des applications affines de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$ . Lorsque  $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ , on note simplement  $\text{Aff}(\mathcal{E})$ .

**Exemple 1.7.** (1) Si  $\vec{x} \in E$ , la translation  $\tau_{\vec{x}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ;  $a \mapsto a + \vec{x}$  est affine : si  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$  sont tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , on a

$$\tau_{\vec{x}}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) + \vec{x} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_i + \vec{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tau_{\vec{x}}(a_i)$$

- (2) Si  $\mathcal{F}_1 = a_1 + F_1$  et  $\mathcal{F}_2 = a_2 + F_2$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  tels que  $F_1 \oplus F_2 = E$ , on a vu que  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{a\}$ , et pour tout  $m \in \mathcal{E}$ , il existe  $\pi_1(m) \in \mathcal{F}_1$  et  $\pi_2(m) \in \mathcal{F}_2$  uniques tels que  $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{a\pi_1(m)} + \overrightarrow{a\pi_2(m)}$ . Alors les applications  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont affines (exercice).

**Proposition 1.7.1.** Supposons  $f$  affine. Si  $\mathcal{E}'$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ , alors  $f(\mathcal{E}')$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{F}'$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{F}$  et si  $f^{-1}(\mathcal{F}') \neq \emptyset$ , alors  $f^{-1}(\mathcal{F}')$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ .

Supposons  $\mathcal{E}$  de dimension  $n$ , et soit  $(a_0, \dots, a_n)$  une base affine de  $\mathcal{E}$ . On pose

$$\begin{aligned} \phi: \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) &\rightarrow \mathcal{F}^{n+1} \\ f &\mapsto (f(a_0), \dots, f(a_n)) \end{aligned}$$

**Proposition 1.7.2.** L'application  $\phi$  est une bijection.

*Démonstration.* Soit  $\underline{b} = (b_0, \dots, b_n) \in \mathcal{F}^{n+1}$ . Un point  $m \in \mathcal{E}$  s'écrit de façon unique  $m = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$  avec  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$  tels que  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ . On pose  $\psi_{\underline{b}}(m) = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_i$ . Cela définit de façon unique une application  $\psi_{\underline{b}}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ , qui est affine en vertu de l'associativité du barycentre. On dispose donc de l'application

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{F}^{n+1} &\rightarrow \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \\ \underline{b} &\mapsto \psi_{\underline{b}} \end{aligned}$$

Par construction, elle vérifie  $\psi \circ \phi = \text{Id}_{\text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})}$  et  $\phi \circ \psi = \text{Id}_{\mathcal{F}^{n+1}}$ , ce qui prouve que  $\phi$  est bijective, d'inverse  $\psi$ .  $\square$

**Théorème 1.7.3.** L'application  $f$  est affine si et seulement si

$$(\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, F)) (\forall a, b \in \mathcal{E}) \overrightarrow{f(a)f(b)} = \varphi(\overrightarrow{ab})$$

L'application  $\varphi$  est alors unique : on l'appelle *application linéaire associée à l'application affine  $f$* , et on la note  $\vec{f}$ .

*Démonstration.* • Supposons  $f$  affine. Fixons  $\omega \in \mathcal{E}$ . Si  $\vec{x} \in E$ , posons

$$\varphi(\vec{x}) = \overrightarrow{f(\omega)f(\omega + \vec{x})} \in F$$

On a donc  $f(a) = f(\omega) + \varphi(\overrightarrow{\omega a})$  pour tout  $a \in \mathcal{E}$ . Si  $\vec{x}, \vec{y} \in E$  et  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , on dispose du barycentre  $(1 - \lambda - \mu)\omega + \lambda(\omega + \vec{x}) + \mu(\omega + \vec{y}) = \omega + \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \mathcal{E}$  : comme  $f$  est affine, on a

$$\begin{aligned} f(\omega + \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= (1 - \lambda - \mu)f(\omega) + \lambda f(\omega + \vec{x}) + \mu f(\omega + \vec{y}) \\ f(\omega) + \varphi(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= (1 - \lambda - \mu)f(\omega) + \lambda(f(\omega) + \varphi(\vec{x})) + \mu(f(\omega) + \varphi(\vec{y})) \\ \varphi(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= \lambda\varphi(\vec{x}) + \mu\varphi(\vec{y}) \end{aligned}$$

ce qui implique que  $\varphi$  est linéaire. Si  $a, b \in \mathcal{E}$ , on a  $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f(\omega)f(a)} + \overrightarrow{f(\omega)f(b)} = -\varphi(\overrightarrow{\omega a}) + \varphi(\overrightarrow{\omega b}) = \varphi(\overrightarrow{ab})$ , ce qu'on voulait. Remarquons que  $\varphi$  est entièrement déterminée par la formule du théorème.

• Réciproquement, supposons l'existence de  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $(\forall a, b \in \mathcal{E}) \overrightarrow{f(a)f(b)} = \varphi(\overrightarrow{ab})$ . Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  : soit  $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \in \mathcal{E}$  le barycentre associé. On a

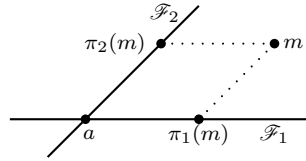
$$\vec{0} = \varphi(\vec{0}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{g a_i}\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(\overrightarrow{g a_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{f(g)f(a_i)}$$



ce qui veut dire que  $f(g) = \text{Bar}((f(a_1), \lambda_1), \dots, (f(a_n), \lambda_n))$ , et donc  $f$  est affine.  $\square$

**Corollaire 1.7.4.** Une application affine préserve le parallélisme.

**Exemple 1.8.** (1) Si  $\vec{x} \in E$ , l'application linéaire associée à la translation  $\tau_{\vec{x}}$  est  $\text{Id}_E$ . En effet, si  $a, b \in \mathcal{E}$ , on a  $\vec{\tau}_{\vec{x}}(\vec{ab}) = (b + \vec{x}) - (a + \vec{x}) = \vec{ab}$ .  
 (2) Si  $\mathcal{F}_1 = a_1 + F_1$  et  $\mathcal{F}_2 = a_2 + F_2$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  tels que  $F_1 \oplus F_2 = E$ , on a  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{a\}$ , et on dispose des applications affines  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Alors  $\vec{\pi}_1$  (resp.  $\vec{\pi}_2$ ) est le projecteur sur  $F_1$  parallèlement à  $F_2$  (resp. sur  $F_2$  parallèlement à  $F_1$ ).



**Proposition 1.8.1.** (1) Si  $f$  est affine et  $\omega \in \mathcal{E}$ , on a  $(\forall m \in \mathcal{E}) f(m) = f(\omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\omega m})$ .  
 (2) Si  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  et  $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  sont des applications affines, il en est de même de  $g \circ f$  (la composée de deux applications affines est affine), et on a  $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ .

*Démonstration.* (2) La première partie de l'énoncé est triviale. Soit  $\omega \in \mathcal{E}$  : si  $m \in \mathcal{E}$ , on a  $f(m) = f(\omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\omega m})$ , donc

$$g(f(m)) = g(f(\omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\omega m})) = g(f(\omega)) + \vec{g}(\vec{f}(\overrightarrow{\omega m}))$$

ce qui prouve que  $g \circ f$  est affine (ce qui résulte d'ailleurs immédiatement de la définition), d'application linéaire associée  $\vec{g} \circ \vec{f}$ .  $\square$

**Proposition 1.8.2.** Supposons  $f$  affine. Alors  $f$  est bijective si et seulement si  $\vec{f}$  est un isomorphisme. Dans ce cas  $f^{-1}$  est affine elle aussi, et  $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$ .

*Démonstration.* Si  $\vec{x} \in \text{Ker}(\vec{f})$ , et  $\omega \in \mathcal{E}$ , on a  $f(\omega + \vec{x}) = f(\omega) + \vec{f}(\vec{x}) = f(\omega)$ , de sorte que  $\omega + \vec{x} = \omega$  par injectivité de  $f$  i.e.  $\vec{x} = \vec{0}$  : l'application  $\vec{f}$  est injective. Soient  $a, b \in \mathcal{F}$  : on a  $f^{-1}(a), f^{-1}(b) \in \mathcal{E}$ . Comme  $f$  est affine, on a  $\vec{ab} = \overrightarrow{f(f^{-1}(a))f(f^{-1}(b))} = \vec{f}(\overrightarrow{f^{-1}(a)f^{-1}(b)})$ . Cela implique que  $\vec{f}$  est surjective, donc un isomorphisme.

Réciproquement, supposons  $\vec{f}$  bijective. Soit  $\omega \in \mathcal{E}$ . Si  $m \in \mathcal{F}$ , on a

$$\begin{aligned} f(a) = m &\Leftrightarrow f(\omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\omega a}) = m \Leftrightarrow \vec{f}(\overrightarrow{\omega a}) = \overrightarrow{f(\omega)m} \Leftrightarrow \overrightarrow{\omega a} = \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{f(\omega)m}) \\ &\Leftrightarrow a = \omega + \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{f(\omega)m}) \end{aligned}$$

ce qui montre que  $f$  est bijective. D'après ce qui précède, on a

$$f^{-1}(m) = \omega + \vec{f}^{-1}(\overrightarrow{f(\omega)m})$$

pour tout  $m \in \mathcal{F}$ , de sorte que  $f^{-1}$  est affine, et  $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{-1}$ .  $\square$

**Exemple 1.9.** Si  $\vec{x} \in E$ , alors  $\tau_{\vec{x}}$  est bijective (d'inverse  $\tau_{-\vec{x}}$ ). On a  $\vec{\tau}_{\vec{x}} = \text{Id}_E$ .

**Théorème 1.9.1.** L'ensemble des bijections affines de  $\mathcal{E}$  dans lui-même est un groupe pour la composition : on l'appelle le *groupe affine* et on le note  $\mathbf{GA}(\mathcal{E})$ . L'application

$$\begin{aligned}\Psi: \mathbf{GA}(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathbf{GL}(E) \\ f &\mapsto \vec{f}\end{aligned}$$

est un morphisme surjectif de groupes. Son noyau est le sous-groupe

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \{\tau_{\vec{x}}, \vec{x} \in E\}$$

des translations de  $\mathcal{E}$ .

*Démonstration.* Le fait que  $\mathbf{GA}(\mathcal{E})$  soit un groupe et que l'application  $\Psi$  soit un morphisme de groupes résulte des deux propositions qui précèdent. Soit  $\varphi \in \mathbf{GL}(E)$ . Fixons  $\omega \in \mathcal{E}$  et posons

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\omega: \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ a &\mapsto \omega + \varphi(\overrightarrow{\omega a})\end{aligned}$$

C'est une application affine, d'application linéaire associée  $\varphi$  : elle est donc bijective puisque  $\varphi$  l'est : cela prouve la surjectivité du morphisme  $\Psi$ .

On a  $\mathbf{Ker}(\Psi) = \{f \in \mathbf{GA}(\mathcal{E}), \vec{f} = \mathbf{Id}_E\}$ . On a déjà vu que les translations sont dans ce noyau. Réciproquement, supposons  $\vec{f} = \mathbf{Id}_E$ . Fixons  $\omega \in \mathcal{E}$  et posons  $\vec{x} = \overrightarrow{\omega f(\omega)} \in E$ . Pour  $a \in \mathcal{E}$ , on a

$$f(a) = f(\omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\omega a}) = f(\omega) + \overrightarrow{\omega a} = f(\omega) + \overrightarrow{\omega f(\omega)} + \overrightarrow{f(\omega)a} = a + \vec{x}$$

de sorte que  $f = \tau_{\vec{x}}$ . □

**Remarque.** L'application naturelle

$$\begin{aligned}E &\rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E}) \\ \vec{x} &\mapsto \tau_{\vec{x}}\end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes (exercice trivial).

**Définition 1.9.2.** Soient  $\omega \in \mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbf{R}^\times$ . L'*homothétie* de centre  $\omega$  et de rapport  $\lambda$  est l'application affine

$$\begin{aligned}f_{\omega,\lambda}: \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{E} \\ m &\mapsto \omega + \lambda \overrightarrow{\omega m}\end{aligned}$$

On a bien sûr  $\vec{h}_{\omega,\lambda} = \lambda \mathbf{Id}_E$ .

**Définition 1.9.3.** Soit  $\mathcal{H}(E) = \{\lambda \mathbf{Id}_E, \lambda \in \mathbf{R}^\times\} \leq \mathbf{GL}(E)$  le sous-groupe constitué des homothéties de rapport non nul (on a évidemment  $\mathcal{H}(E) \simeq \mathbf{R}^\times$ ). Alors  $\mathcal{HT}(\mathcal{E}) := \Psi^{-1}(\mathcal{H}(E))$  est un sous-groupe de  $\mathbf{GA}(\mathcal{E})$  appelé *groupe des homothéties-translations* de  $\mathcal{E}$ .

**Remarque.** On a  $\mathcal{HT}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E}) \coprod \{h_{\omega,\lambda}, \omega \in \mathcal{E}, \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}\}$  (exercice).

**Remarque.** Expression analytique d'une application affine. Supposons  $f$  affine et  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  de dimension finie. Fixons  $(a_0, \dots, a_n)$  et  $(b_0, \dots, b_p)$  des repères affines de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  respectivement. Notons  $M \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbf{R})$  la matrice de  $\vec{f}$  dans les bases  $(\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n})$  et  $(\overrightarrow{b_0 b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0 b_p})$ . Si  $a \in \mathcal{E}$ , soit  $X \in \mathbf{R}^n$  (resp.  $Y \in \mathbf{R}^p$ , resp.  $Y_0 \in \mathbf{R}^p$ ) le vecteur colonne

des coordonnées de  $a$  (resp.  $f(a)$ , resp.  $f(a_0)$ ) dans le repère cartésien  $(a_0, (\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n}))$  (resp.  $(b_0, (\overrightarrow{b_0b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0b_p}))$ ). Alors

$$Y = Y_0 + MX$$

1.9.4. *Points fixes d'une application affine.* On suppose désormais que  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est affine.

**Définition 1.9.5.** On dit que  $a \in \mathcal{E}$  est un *point fixe* de  $f$  si  $f(a) = a$ . On a alors  $(\forall m \in \mathcal{E}) f(m) = a + \overrightarrow{f(am)}$ . On note  $\text{Fix}(f)$  l'ensemble des points fixes de  $f$  dans  $\mathcal{E}$ .

**Remarque.** Soit  $a \in \mathcal{E}$ . Il existe  $\tau \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$  et  $f_a: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  affine uniques tels que  $a \in \text{Fix}(f_a)$  et  $f = \tau \circ f_a$ . En effet, s'ils existent, on doit avoir  $\tau(a) = f(a)$ , de sorte que nécessairement  $\tau = \tau_{af(a)}$  et  $f_a = \tau^{-1} \circ f$ . Comme  $f_a(a) = \tau^{-1}(f(a)) = a$ , ils répondent bien à la question.

**Théorème 1.9.6.** Supposons  $\mathcal{E}$  de dimension finie.

- (1) Si  $1 \notin \text{Sp}(\overrightarrow{f})$ , alors  $f$  admet un unique point fixe.
- (2) Si  $1 \in \text{Sp}(\overrightarrow{f})$ , alors  $\text{Fix}(f)$  est soit vide, soit un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  de direction  $\text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_E)$ .

*Démonstration.* Soit  $\omega \in \mathcal{E}$  : on a  $(\forall m \in \mathcal{E}) f(m) = f(\omega) + \overrightarrow{f(\overline{\omega m})}$ . Le point  $m$  est fixe sous  $f$  si et seulement si  $m = f(\omega) + \overrightarrow{f(\overline{\omega m})}$  i.e. si et seulement si  $\overrightarrow{f(\omega)\omega} = (\overrightarrow{f} - \text{Id}_E)(\overline{\omega m})$ .

• Si  $1 \notin \text{Sp}(\overrightarrow{f})$ , l'application  $\overrightarrow{f} - \text{Id}_E$  est bijective (car  $\dim_{\mathbf{R}}(E) < +\infty$ ) : ce qui précède équivaut à  $\overline{\omega m} = (\overrightarrow{f} - \text{Id}_E)^{-1}(\overrightarrow{f(\omega)\omega})$ . On a nécessairement

$$m = \omega + (\overrightarrow{f} - \text{Id}_E)^{-1}(\overrightarrow{f(\omega)\omega})$$

ce qui montre que  $f$  admet un unique point fixe.

• Si  $1 \in \text{Sp}(\overrightarrow{f})$ , et  $\text{Fix}(f)$  n'est pas vide, fixons  $m_0 \in \text{Fix}(f)$  : d'après ce qui précède,  $m \in \text{Fix}(f)$  si et seulement si

$$(\overrightarrow{f} - \text{Id}_E)(\overline{\omega m}) = \overrightarrow{f(\omega)\omega} = (\overrightarrow{f} - \text{Id}_E)(\overline{\omega m_0})$$

ce qui équivaut à  $(\overrightarrow{f} - \text{Id}_E)(\overline{\omega m} - \overline{\omega m_0}) = 0$ , soit encore  $(\overrightarrow{f} - \text{Id}_E)(\overline{m_0 m}) = 0$ , i.e.  $\overline{m_0 m} \in \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_E)$ . On a donc

$$\text{Fix}(f) = m_0 + \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \text{Id}_E)$$

□

**Exemple 1.10.** (1) Si  $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ , on a  $\text{Fix}(\tau_{\vec{x}}) = \emptyset$ .

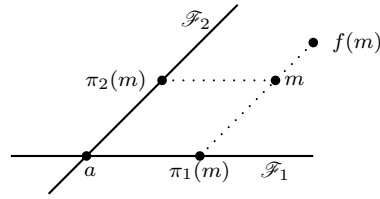
(2) Si  $\mathcal{F}_1 = a + F_1$  et  $\mathcal{F}_2 = a + F_2$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  tels que  $F_1 \oplus F_2 = E$ , on dispose des projections  $\pi_1$  et  $\pi_2$  (cf plus haut). Alors  $\text{Fix}(\pi_1) = \mathcal{F}_1$  et  $\text{Fix}(\pi_2) = \mathcal{F}_2$ .

(3) Si  $f$  est une homothétie-translation de rapport  $\lambda \neq 1$ , alors  $\text{Sp}(\overrightarrow{f}) = \{\lambda\}$ , de sorte que  $f$  admet un unique point fixe  $\omega$ . Pour tout  $m \in \mathcal{E}$ , on a  $f(m) = \omega + \lambda \overline{\omega m}$  i.e.  $f$  est l'homothétie de centre  $\omega$  et de rapport  $\lambda$ .

**Définition 1.10.1.** Supposons qu'il existe une décomposition  $E = F_1 \oplus F_2$ ,  $a \in \mathcal{E}$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$  tels que

$$(\forall m \in \mathcal{E}) f(m) = a + \overrightarrow{a\pi_1(m)} + \lambda \overrightarrow{a\pi_2(m)}$$

On dit alors que  $f$  est l'*affinité* de base  $\mathcal{F}_1 = a + F_1$ , de direction  $F_2$  et de rapport  $\lambda$ . Si  $\lambda \neq 1$ , on a  $\text{Fix}(f) = \mathcal{F}_1$ . Lorsque  $\lambda = 0$ , on retrouve la projection sur  $\mathcal{F}_1$  parallèlement à  $F_2$ . Lorsque  $\lambda = -1$ , on l'appelle la *symétrie* par rapport à  $\mathcal{F}_1$  parallèlement à  $F_2$ .



1.11. **Un exemple : le théorème de Thalès.** On va utiliser les notions introduites pour démontrer un théorème de géométrie plane du Collège.

**Définition 1.11.1.** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points alignés distincts et  $\vec{u}$  un vecteur directeur de la droite qu'ils définissent. Il existe  $\lambda \in \mathbf{R}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{u}$  : la *mesure algébrique*  $\overline{AB} = \lambda$  dépend du choix de  $\vec{u}$ , mais le rapport  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \in \mathbf{R}^\times$  n'en dépend pas.

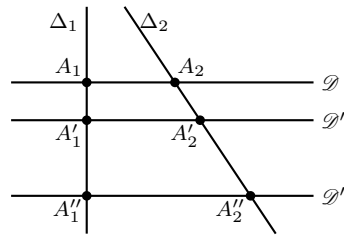
**Théorème 1.11.2.** (*Thalès*). Soient  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  et  $\mathcal{D}''$  trois droites parallèles, et  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  deux droites non parallèles aux précédentes. Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on pose  $A_i = \mathcal{D} \cap \Delta_i$ ,  $A'_i = \mathcal{D}' \cap \Delta_i$ ,  $A''_i = \mathcal{D}'' \cap \Delta_i$ . Alors

$$\frac{\overline{A_1 A''_1}}{\overline{A_1 A'_1}} = \frac{\overline{A_2 A''_2}}{\overline{A_2 A'_2}}$$

et réciproquement, si  $M \in \Delta_1$  vérifie

$$\frac{\overline{A_1 M}}{\overline{A_1 A'_1}} = \frac{\overline{A_2 A''_2}}{\overline{A_2 A'_2}}$$

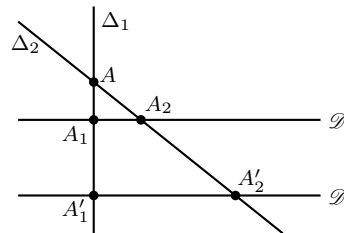
alors  $M = A''_1$ .



*Démonstration.* On note  $f$  la projection sur  $\Delta_2$  parallèlement à  $\mathcal{D}$ . Alors  $f(A_1) = A_2$ ,  $f(A'_1) = A'_2$  et  $f(A''_1) = A''_2$ . Si  $\overline{A_1 A''_1} = \lambda \overline{A_1 A'_1}$ , on a  $f(\overline{A_1 A''_1}) = \lambda f(\overline{A_1 A'_1})$ , i.e.  $\overline{A_2 A''_2} = \lambda \overline{A_2 A'_2}$  ce qui prouve le sens direct. La réciproque en résulte elle aussi.  $\square$

**Corollaire 1.11.3.** Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites parallèles et  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  deux droites sécantes en  $A$ , non parallèles à  $\mathcal{D}$ . Pour  $i \in \{1, 2\}$ , on pose  $A_i = \mathcal{D} \cap \Delta_i$ ,  $A'_i = \mathcal{D}' \cap \Delta_i$ , supposés distincts de  $A$ . Alors

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA'_1}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA'_2}} = \frac{\overline{A_1 A_2}}{\overline{A'_1 A'_2}}$$



*Démonstration.* On fait passer par  $A$  la droite  $\mathcal{D}''$  parallèle à  $\mathcal{D}$  : le théorème de Thalès implique  $\lambda := \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA'_1}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA'_2}}$ ; si  $g$  désigne l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\lambda$ , on a  $g(A_1) = A'_1$  et  $g(A_2) = A'_2$ , ce qui implique  $\frac{\overline{A_1 A_2}}{\overline{A'_1 A'_2}} = \lambda$ .  $\square$

1.12. **Convexité.** Dans tout ce paragraphe,  $\mathcal{E}$  est un espace affine réel de dimension finie  $n$  fixé. On note  $E$  sa direction.

**Définition 1.12.1.** (1) Une *forme affine* est une application affine  $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$  (où  $\mathbf{R}$  est muni de sa structure d'espace affine réel naturelle. Si  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  est un repère affine de  $\mathcal{E}$ , alors  $(\vec{e}_i = \overrightarrow{a_0 a_i})_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$ . Il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbf{R}$  tels que

$$\varphi\left(a_0 + \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i\right) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta$$

pour tout  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$  (les  $\alpha_i$  ne sont autres que les coordonnées de  $\vec{\varphi}$  dans la base duale de  $(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ ).

(2) Un *hyperplan affine* de  $\mathcal{E}$  est un sous-espace affine  $H$  de dimension  $n - 1$ . C'est donc une partie de la forme  $\varphi^{-1}(\{0\})$  avec  $\varphi$  une forme affine *non constante* (elle est alors uniquement déterminée à multiplication par une constante non nulle près). En particulier, si on fixe un repère affine comme précédemment,  $H$  a pour équation cartésienne

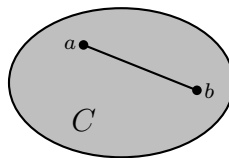
$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta = 0$$

(3) Un *demi-espace* est une partie de la forme  $\{m \in \mathcal{E}, \varphi(m) > 0\}$  avec  $\varphi$  une forme affine non constante. En particulier, un hyperplan affine définit deux demi-espaces  $\{m \in \mathcal{E}, \varphi(m) > 0\}$  et  $\{m \in \mathcal{E}, \varphi(m) < 0\}$ .

**Remarque.** On peut aussi<sup>1</sup> écrire l'équation d'un hyperplan affine en termes des coordonnées barycentriques (on parle alors d'équation barycentrique).

**Définition 1.12.2.** Une partie  $C \subset \mathcal{E}$  est dite *convexe* si

$$(\forall a, b \in C) (\forall t \in [0, 1]) ta + (1 - t)b \in C$$



**Remarque.** Une partie est convexe si et seulement si elle est stable par tout barycentre à coefficients *positifs* (l'équivalence résulte de l'associativité du barycentre).

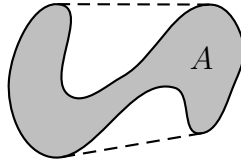
**Exemple 1.13.** (1) Les parties convexes de  $\mathbf{R}$  sont les intervalles.  
 (2) Tout sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  est convexe (stable par *tout* barycentre).  
 (3) Tout demi-espace est convexe (exercice facile).

**Proposition 1.13.1.** (1) Toute intersection de parties convexes est une partie convexe.

(2) Si  $C \subset \mathcal{E}$  est convexe et  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est une application affine, alors  $f(C)$  est convexe. Idem pour l'image inverse.

**Définition 1.13.2.** Soit  $A \subset \mathcal{E}$ . L'*enveloppe convexe* de  $A$ , notée  $\text{conv}(A)$  est l'intersection de toutes les parties convexes qui contiennent  $A$ . D'après la proposition précédente, elle est convexe : c'est la plus petite partie convexe de  $\mathcal{E}$  qui contient  $A$ .

1. Et c'est d'ailleurs un bon exercice.



**Théorème 1.13.3.** (*Carathéodory*). Si  $A \subset \mathcal{E}$ , alors  $\text{conv}(A)$  est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de  $n + 1$  points de  $A$ .

*Démonstration.* Soit  $B$  l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls d'au plus  $n + 1$  points de  $A$ . On a bien sûr  $B \subset \text{conv}(A)$ . Soit  $m \in \text{conv}(A)$  : il existe  $p \in \mathbf{N}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_p \in A$  et  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}_{\geq 0}$  tels que  $m = \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i$  et  $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$ .

Si  $p \leq n$ , on a  $m \in B$ . Supposons désormais  $p > n$ . Comme  $\mathcal{E}$  est de dimension  $n$ , la famille  $(a_0, \dots, a_p)$  est affinement liée : un de ses points est barycentre des autres. Quitte à changer les indices, on peut supposer que c'est  $a_0$  : il existe  $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbf{R}$  tels que  $\sum_{i=1}^p \mu_i = 1$  et  $a_0 = \sum_{i=1}^p \mu_i a_i$ , i.e.  $\sum_{i=1}^p \mu_i \overrightarrow{a_0 a_i} = \vec{0}$ . Si  $t \in \mathbf{R}$ , on a alors

$$m = \left( \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i \right) - t \left( \sum_{i=1}^p \mu_i \overrightarrow{a_0 a_i} \right) = (\lambda_0 + t) a_0 + \sum_{i=1}^p (\lambda_i - t \mu_i) a_i$$

On veut  $\lambda_0 + t \geq 0$  et  $(\forall i \in \{1, \dots, p\}) \lambda_i - t \mu_i \geq 0$ , et nul pour au moins un indice  $i$ . Comme  $\sum_{i=1}^p \mu_i = 1$ , l'ensemble  $I = \{i \in \{1, \dots, p\}, \mu_i > 0\}$  est non vide : on prend  $t = \min_{i \in I} \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right\} \geq 0$ . On a  $\lambda_0 + t \geq 0$ , si  $\mu_i \leq 0$ , on a  $\lambda_i - t \mu_i \geq 0$  et pour  $i \in I$ , on a  $\frac{\lambda_i}{\mu_i} \geq t$  donc  $\lambda_i - t \mu_i \geq 0$ . En outre, il existe  $i_0 \in I$  tel que  $\lambda_{i_0} - t \mu_{i_0} = 0$ . Le point  $m$  est donc barycentre à coefficients positifs ou nuls de  $p$  éléments de  $A$ . En recommençant un nombre fini de fois, on voit que  $m \in B$ .  $\square$

**Corollaire 1.13.4.** Si  $A$  est compact, alors  $\text{conv}(A)$  est compact.

*Démonstration.* Soit  $\Delta = \{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}_{\geq 0}^{n+1}, \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1\}$ . D'après le théorème de Carathéodory, l'application

$$\gamma: A^{n+1} \times \Delta \rightarrow \text{conv}(A)$$

$$((a_0, \dots, a_n), (\lambda_0, \dots, \lambda_n)) \mapsto \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$$

est surjective. Comme  $A$  et  $\Delta$  sont compacts, il en est de même de  $A^{n+1} \times \Delta$ . Comme  $\gamma$  est continue,  $\text{conv}(A) = \gamma(A^{n+1} \times \Delta)$  est compact.  $\square$

**Théorème 1.13.5.** (*Hahn-Banach, version « analytique »*). Soient  $p: E \rightarrow \mathbf{R}$  une sous-norme, i.e. une application telle que :

$$(i) \quad (\forall x \in E) (\forall \lambda \in \mathbf{R}_{>0}) p(\lambda x) = \lambda p(x);$$

$$(ii) \quad (\forall x, y \in E) p(x + y) \leq p(x) + p(y);$$

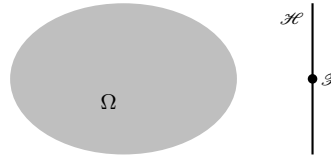
$F \subset E$  un sous- $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et  $\varphi: F \rightarrow \mathbf{R}$  une forme linéaire telle que  $(\forall x \in F) \varphi(x) \leq p(x)$ . Alors il existe une forme linéaire  $\psi: E \rightarrow \mathbf{R}$  telle que :

$$(a) \quad (\forall x \in F) \psi(x) = \varphi(x) \text{ (i.e. } \psi \text{ prolonge } \varphi);$$

$$(b) \quad (\forall x \in E) \psi(x) \leq p(x).$$

*Démonstration.* Comme  $E$  est de dimension finie, il suffit de traiter le cas où  $F$  est un hyperplan de  $E$ . Soit  $x_0 \in E \setminus F$  : on a  $E = F \oplus \mathbf{R}x_0$ , et  $\psi$  est entièrement déterminée par le fait que  $\psi|_F = \varphi$  et sa valeur en  $x_0$ . Il s'agit donc de choisir  $\psi(x_0) \in \mathbf{R}$  de sorte que  $(\forall y \in F) (\forall \lambda \in \mathbf{R}) \psi(y + \lambda x_0) \leq p(y + \lambda x_0)$ . C'est toujours le cas lorsque  $\lambda = 0$  par hypothèse. Supposons  $\lambda \neq 0$  : il existe  $z \in F$  tel que  $y = |\lambda|z$ , d'après (i), l'inégalité qui précède équivaut à  $\psi(z + \varepsilon x_0) \leq p(z + \varepsilon x_0)$  avec  $\varepsilon = \frac{\lambda}{|\lambda|} \in \{\pm 1\}$ , soit encore  $\varphi(z) + \varepsilon \psi(x_0) \leq p(z + \varepsilon x_0)$ , i.e.  $(\forall z \in F) \varphi(z) - p(z - x_0) \leq \psi(x_0) \leq p(z + x_0) - \varphi(z)$ . Un tel choix est possible si et seulement si  $(\forall z_1, z_2 \in F) \varphi(z_1) - p(z_1 - x_0) \leq p(z_2 + x_0) - \varphi(z_2)$ , soit encore  $\varphi(z_1) + \varphi(z_2) \leq p(z_1 - x_0) + p(z_2 + x_0)$ , ce qui est le cas vu que  $\varphi(z_1 + z_2) \leq p(z_1 + z_2) \leq p(z_1 - x_0) + p(z_2 + x_0)$  (d'après (ii)).  $\square$

**Corollaire 1.13.6.** (*Hahn-Banach, version « géométrique »*). Soient  $\Omega \subset \mathcal{E}$  un ouvert non vide et  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  qui ne rencontre pas  $\Omega$ . Alors il existe un hyperplan affine  $\mathcal{H}$  qui contient  $\mathcal{F}$  et qui ne rencontre pas  $\Omega$ .



*Démonstration.* • Soit  $\omega \in \Omega$  : rappelons qu'on dispose de la bijection

$$\begin{aligned} \Theta_\omega \mathcal{E} &\rightarrow E \\ m &\mapsto \overline{\omega m} \end{aligned}$$

Cela permet de poser

$$\begin{aligned} p_\Omega : E &\rightarrow \mathbf{R} \\ \vec{x} &\mapsto \inf \{ \alpha \in \mathbf{R}_{>0}, \Theta_\omega(\alpha^{-1}\vec{x}) = \omega + \alpha^{-1}\vec{x} \in \Omega \} \end{aligned}$$

(c'est la *jauge* de  $\Omega$ ). On a  $\Omega = \omega + \{ \vec{x} \in E, p_\Omega(\vec{x}) < 1 \}$ . En effet, si  $m \in \Omega$ , on a  $\omega + (1+r)\overline{\omega m} \in \Omega$  pour  $r \in \mathbf{R}_{>0}$  assez petit (parce que  $\Omega$  est ouvert), et  $p_\Omega(\vec{x}) \leq \frac{1}{1+r} < 1$ . Réciproquement, si  $p(\vec{x}) < 1$ , il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $\omega + \alpha^{-1}\vec{x} \in \Omega$ , et par convexité de  $\Omega$ , on a  $m = \omega + \vec{x} = \alpha(\omega + \alpha^{-1}\vec{x}) + (1-\alpha)(\omega + \vec{0}) \in \Omega$ .

• L'application  $p_\Omega$  est une sous-norme de  $E$ . La propriété (i) est évidente : montrons (ii). Soient  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ . Si  $r \in \mathbf{R}_{>0}$ , on a  $\omega + \frac{\vec{x}}{p_\Omega(\vec{x})+r}, \omega + \frac{\vec{y}}{p_\Omega(\vec{y})+r} \in \Omega$  : par convexité de  $\Omega$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $\omega + \frac{t\vec{x}}{p_\Omega(\vec{x})+r} + \frac{(1-t)\vec{y}}{p_\Omega(\vec{y})+r} \in \Omega$ . Appliqué avec  $t = \frac{p_\Omega(\vec{x})+r}{p_\Omega(\vec{x})+p_\Omega(\vec{y})+2r}$ , on obtient  $\omega + \frac{\vec{x}+\vec{y}}{p_\Omega(\vec{x})+p_\Omega(\vec{y})+2r} \in \Omega$ , ce qui implique que  $p_\Omega(\vec{x} + \vec{y}) \leq p_\Omega(\vec{x}) + p_\Omega(\vec{y}) + 2r$ . Comme c'est vrai pour tout  $r \in \mathbf{R}_{>0}$ , on a bien (ii).

• Écrivons  $\mathcal{F} = a + F_0$ , et posons  $F = F_0 \oplus \mathbf{R}\overline{\omega a}$  (on a  $\overline{\omega a} \notin F_0$  car  $\Omega \cap \mathcal{F} = \emptyset$ ). On note  $\varphi$  la forme linéaire de  $F$  telle que  $\text{Ker}(\varphi) = F_0$  et  $\varphi(\overline{\omega a}) = 1$ . Montrons que pour tout  $\vec{x} \in F$ , on a  $\varphi(\vec{x}) \leq p_\Omega(\vec{x})$ . Écrivons  $\vec{x} = \vec{y} + \lambda\overline{\omega a}$ , avec  $\vec{y} \in F_0$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$  : il s'agit de voir que  $\lambda \leq p_\Omega(\vec{y} + \lambda\overline{\omega a})$ . Comme  $p_\Omega$  est à valeurs positives, c'est évident pour  $\lambda \leq 0$  : supposons  $\lambda > 0$ . En divisant par  $\lambda$ , il s'agit de voir que  $1 \leq p_\Omega(\lambda^{-1}\vec{y} + \overline{\omega a})$ , ce qui est le cas, puisque  $\omega + \lambda^{-1}\vec{y} + \overline{\omega a} = a + \lambda^{-1}\vec{y} \in \mathcal{F}$ , qui ne rencontre pas  $\Omega = \omega + \{ \vec{x} \in E, p_\Omega(\vec{x}) < 1 \}$ .

• On peut donc appliquer le théorème de Banach (version analytique) : il existe  $\psi : E \rightarrow \mathbf{R}$  une forme linéaire qui prolonge  $\varphi$  (en particulier  $\psi \neq 0$  vu que  $\varphi \neq 0$ ) et telle que  $\psi \leq p_\Omega$ . Soit  $\mathcal{H} = a + \{ \vec{x} \in E, \psi(\vec{x}) = 0 \} \supset a + F_0 = \mathcal{F}$ . C'est un hyperplan affine de  $\mathcal{E}$ . Soit  $m \in \mathcal{H}$  : on a  $\psi(\overline{\omega m}) = 0$ , donc  $\psi(\overline{\omega a}) = \psi(\overline{\omega m}) + \psi(\overline{\omega a}) = \varphi(\overline{\omega a}) = 1$ , donc  $1 \leq p_\Omega(\overline{\omega m})$ . Comme  $\Omega = \omega + \{ \vec{x} \in E, p_\Omega(\vec{x}) < 1 \}$ , on a  $\Omega \cap \mathcal{H} = \emptyset$  et on a fini. □

**Définition 1.13.7.** Soient  $C \subset \mathcal{E}$  une partie convexe et  $c \in C$ . On dit que  $c$  est *extrémal* lorsque  $C \setminus \{c\}$  est encore convexe.

**Remarque.** Avec les notations de la définition précédente,  $c$  est extrémal si et seulement si  $(\forall a, b \in C) (\forall t \in ]0, 1[) c = ta + (1-t)b \Rightarrow a = b = c$  (exercice).

**Théorème 1.13.8.** (*Krein-Milman*). Une partie compacte convexe est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

*Démonstration.* Admis. □



## 2. ESPACES AFFINES EUCLIDIENS DE DIMENSION FINIE

Jusqu'à présent, on n'a pas utilisé la notion de distance (hormis lorsqu'on s'est restreints à une droite, avec la « mesure algébrique », cf le théorème de Thalès). Pour ce faire, il est nécessaire d'enrichir la structure d'espace affine.

**2.1. Rappels sur les espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie).** Dans tout ce paragraphe,  $E$  désigne un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

2.1.1. *Produit scalaire et norme.*

**Définition 2.1.2.** Un *produit scalaire* sur  $E$  est une application

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$$

qui est :

- (i) bilinéaire :  $(\forall x, y, z \in E) (\forall \lambda \in \mathbf{R}) \langle x + \lambda y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \lambda \langle y | z \rangle$  et  $\langle z | x + \lambda y \rangle = \langle z | x \rangle + \lambda \langle z | y \rangle$  ;
- (ii) symétrique :  $(\forall x, y \in E) \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$  ;
- (iii) définie positive :  $(\forall x \in E) \langle x | x \rangle \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $x = 0$ .

Un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un *espace vectoriel euclidien*.

On suppose désormais  $E$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . On pose

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle} \end{aligned}$$

**Définition 2.1.3.** L'application  $\|\cdot\|$  s'appelle la *norme* associée au produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

**Proposition 2.1.4.** La norme vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $(\forall x \in E) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ;
- (2)  $(\forall x \in E) (\forall \lambda \in \mathbf{R}) \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  ;
- (3)  $(\forall x, y \in E) |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ , avec égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires (inégalité de *Cauchy-Schwarz*) ;
- (4)  $(\forall x, y \in E) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire) ;
- (5)  $(\forall x, y \in E) \langle x | y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$  (formules de *polarisation*).

*Démonstration.* (1) résulte de (iii). Pour (2), on a

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x | x \rangle} = |\lambda| \|x\|$$

(3) Pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on a  $\|x + \lambda y\|^2 \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $x + \lambda y = 0$ . On a donc

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y | x + \lambda y \rangle &= \langle x | x \rangle + \lambda \langle x | y \rangle + \lambda \langle y | x \rangle + \lambda^2 \langle y | y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\lambda \langle x | y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

C'est un trinôme du second degré en  $\lambda$  qui ne prend que des valeurs positives : son discriminant est négatif, *i.e.*

$$\langle x | y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$$

ce qu'on voulait. Il y a égalité si et seulement si ce discriminant est nul, *i.e.* si et seulement si  $(\exists \lambda \in \mathbf{R}) x + \lambda y = 0$  soit encore si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

(4) On a  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$  d'après (3), *i.e.*  $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ , ce qu'on voulait.

(5) On a  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2$  donc  $\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\langle x | y \rangle$ , et  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2$ , de sorte que  $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x | y \rangle$ .  $\square$



**Définition 2.1.5.** On dit que  $x, y \in E$  sont *orthogonaux* si  $\langle x|y \rangle = 0$ . Plus généralement, deux parties  $A, B \subset E$  sont *orthogonales* lorsque  $(\forall x \in A) (\forall y \in B) \langle x|y \rangle = 0$ .

Si  $A \subset E$ , on pose

$$A^\perp = \{y \in E, (\forall x \in A) \langle x|y \rangle = 0\}$$

c'est un sous-espace vectoriel de  $E$ , qu'on appelle l'*orthogonal* de  $A$ .

**Exemple 2.2.** On a  $E^\perp = \{0\}$  et  $\{0\}^\perp = E$ .

**Corollaire 2.2.1.** (*Pythagore*). Deux vecteurs  $x, y \in E$  sont orthogonaux si et seulement si  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .

*Démonstration.* Résulte du point (5) de la proposition qui précède.  $\square$

On suppose désormais  $E$  de dimension finie.

**Proposition 2.2.2.** Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $E = F \oplus F^\perp$ . En particulier, on a  $(F^\perp)^\perp = F$ .

*Démonstration.* Si  $x \in F \cap F^\perp$ , on a  $\langle x|x \rangle = 0$  donc  $x = 0$ , de sorte que  $F \cap F^\perp = \{0\}$ . En particulier, on a  $\dim_{\mathbf{R}}(F) + \dim_{\mathbf{R}}(F^\perp) \leq \dim_{\mathbf{R}}(E)$  i.e.  $\dim_{\mathbf{R}}(F^\perp) \leq \dim_{\mathbf{R}}(E) - \dim_{\mathbf{R}}(F)$ . Considérons l'application

$$\begin{aligned} \rho: E &\rightarrow F^\vee \\ x &\mapsto \langle x|\cdot \rangle \end{aligned}$$

Elle est linéaire, et par définition, on a  $\text{Ker}(\rho) = F^\perp$ . D'après le théorème du rang, on a  $\dim_{\mathbf{R}}(\text{Ker}(\rho)) + \dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(\rho)) = \dim_{\mathbf{R}}(E)$  : comme  $\dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(\rho)) \leq \dim_{\mathbf{R}}(F)$ , on a  $\dim_{\mathbf{R}}(F^\perp) = \dim_{\mathbf{R}}(E) - \dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(\rho)) \geq \dim_{\mathbf{R}}(E) - \dim_{\mathbf{R}}(F)$ . Il en résulte que  $\dim_{\mathbf{R}}(F^\perp) = \dim_{\mathbf{R}}(E) - \dim_{\mathbf{R}}(F)$ , ce qui implique bien que  $E = F \oplus F^\perp$ .

On a bien sûr  $F \subset (F^\perp)^\perp$  : c'est une égalité pour des raisons de dimension d'après ce qui précède.  $\square$

**Définition 2.2.3.** (1) La *projection orthogonale* sur  $F$  est le projecteur de  $E$  sur  $F$ , parallèlement à  $F^\perp$ .

(2) La *symétrie orthogonale* par rapport à  $F$  est la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

**Proposition 2.2.4.** L'application

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E^\vee \\ x &\mapsto \langle x|\cdot \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* Appelons-la  $\rho$ . On a  $\text{Ker}(\rho) = E^\perp = \{0\}$  et  $\rho$  est injective. Comme  $\dim_{\mathbf{R}}(E^\vee) = \dim_{\mathbf{R}}(E)$ , c'est un isomorphisme.  $\square$

**Remarque.** (1) On sait que tout espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à son dual, mais non canoniquement. L'énoncé qui précède implique que lorsqu'on considère un espace vectoriel euclidien, le produit scalaire fournit un isomorphisme canonique. En particulier, si  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base de  $E$ , la base duale est donnée par  $(\frac{1}{\|e_i\|^2} \langle e_i|\cdot \rangle)_{1 \leq i \leq n}$ .

(2) Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle : dans un espace euclidien, il est commode de l'interpréter comme l'orthogonal d'un vecteur non nul.

**Définition 2.2.5.** Une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$  est dite *orthogonale* (resp. *orthonormale*) lorsque  $(\forall i, j \in \{1, \dots, n\}) i \neq j \Rightarrow \langle e_i | e_j \rangle = 0$  (resp. et  $(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \|e_i\| = 1$ ). Si  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est orthonormée, on a

$$(\forall x \in E) x = \sum_{i=1}^n \langle e_i | x \rangle e_i$$

**Proposition 2.2.6.** L'espace vectoriel euclidien de dimension finie  $E$  admet une base orthonormée.

*Démonstration.* On procède par récurrence, le cas de la dimension 0 étant trivial (base vide). Supposons  $n = \dim_{\mathbf{R}}(E) > 0$  : il existe  $x \in E \setminus \{0\}$ . Posons  $e_n = \frac{x}{\|x\|}$  : on a  $\|e_n\| = 1$ . Soit  $F = \mathbf{R}e_n$  : on sait que  $E = F \oplus F^\perp$ . Comme  $\dim_{\mathbf{R}}(F^\perp) = n - 1$ , il existe une base orthonormée  $(e_i)_{1 \leq i \leq n-1}$  de  $F^\perp$ . Il est facile de voir qu'alors  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base orthonormée de  $E$ .  $\square$

### 2.2.7. Isométries vectorielles.

**Définition 2.2.8.** Soit  $(F, \langle \cdot | \cdot \rangle_F)$  un espace vectoriel euclidien. Une application linéaire  $f: E \rightarrow F$  est une *isométrie* (vectorielle) lorsque  $(\forall x \in E) \|f(x)\|_F = \|x\|_E$ . C'est une *similitude* (vectorielle) lors que  $f = \lambda s$  avec  $\lambda \in \mathbf{R}^\times$  et  $s: E \rightarrow F$  une isométrie.

**Proposition 2.2.9.** (1) Les similitudes (en particulier les isométries) sont injectives.  
(2) Une application linéaire  $f: E \rightarrow F$  est une isométrie si et seulement si

$$(\forall x, y \in E) \langle f(x) | f(y) \rangle_F = \langle x | y \rangle_E$$

*Démonstration.* (1) Une homothétie de rapport non nul est bijective : il suffit de traiter le cas des isométries. Si  $f$  est une isométrie et  $f(x) = 0$ , on a  $\|x\|_E = \|f(x)\|_F = \|0\|_F = 0$  donc  $x = 0$ , et  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ .

(2) Si  $f$  est une isométrie et  $x, y \in E$ , on a  $\|f(x+y)\|_F^2 = \|x+y\|_E^2$ , donc  $\|f(x)\|_F^2 + 2\langle f(x) | f(y) \rangle + \|f(y)\|_F^2 = \|x\|_E^2 + 2\langle x | y \rangle_E + \|y\|_E^2$  et donc  $\langle f(x) | f(y) \rangle_F = \langle x | y \rangle_E$  puisque  $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$  et  $\|f(y)\|_F = \|y\|_E$ . La réciproque s'obtient en prenant  $y = x$ .  $\square$

**Remarque.** Il est clair qu'un composé d'isométries (resp. de similitudes) est une isométrie (resp. une similitude). Par ailleurs, si  $f$  est une isométrie (resp. une similitude) bijective, alors  $f^{-1}$  est une isométrie (resp. une similitude).

**Exemple 2.3.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  : on dispose de la projection orthogonale  $\pi$  de  $E$  sur  $F$ , et de la symétrie orthogonale  $\sigma$  de  $E$  par rapport à  $F$ . Alors  $\sigma$  est une isométrie. En effet, si  $x \in E$ , on a  $x = \pi(x) + (x - \pi(x)) \in F \oplus F^\perp$ , de sorte que  $\|x\|^2 = \|\pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2$ . On a donc

$$\|\sigma(x)\|^2 = \|x - (x - \pi(x))\|^2 = \|\pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2 = \|x\|^2$$

i.e.  $\|\sigma(x)\| = \|x\|$ .

**Définition 2.3.1.** L'ensemble des isométries de  $E$  dans lui-même forme un sous-groupe de  $\text{GL}(E)$  : on le note  $\text{O}(E)$  (on l'appelle le groupe *orthogonal* de  $E$ ). L'ensemble des similitudes vectorielles est le sous-groupe  $\mathbf{R}^\times \text{O}(E)$  de  $\text{GL}(E)$ . Lorsque  $E = \mathbf{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique, on note  $\text{O}_n(\mathbf{R})$  au lieu de  $\text{O}(\mathbf{R}^n)$ .

**Remarque.** Le choix d'une base orthonormée de  $E$  fournit un isomorphisme (non canonique)  $\text{O}(E) \simeq \text{O}_n(\mathbf{R})$ .

**Proposition 2.3.2.** On a  $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) = \{\Omega \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R}), {}^t\Omega\Omega = \Omega{}^t\Omega = \mathbf{I}_n\}$ .

*Démonstration.* On représente les éléments de  $\mathbf{R}^n$  par des vecteurs colonnes : si  $X, Y \in \mathbf{R}^n$ , on a  $\langle X|Y \rangle = {}^tXY \in \mathbf{R}$ . Si  $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ , on a  $M \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$  si et seulement si  $(\forall X, Y \in \mathbf{R}^n) \langle MX|MY \rangle = \langle X|Y \rangle$ , i.e.  ${}^t(MX)MY = {}^tXY$ , soit  ${}^tX{}^tMMY = {}^tXY$ , ce qui implique  ${}^tMM = \mathbf{I}_n$ , soit  $M$  inversible et  $M^{-1} = {}^tM$ , donc aussi  $M{}^tM = \mathbf{I}_n$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.3.** Si  $f \in \mathbf{O}(E)$ , on a  $\det(f) \in \{\pm 1\}$ .

*Démonstration.* Quitte à fixer une base orthonormée de  $E$ , on peut supposer  $E = \mathbf{R}^n$ . Si  $M \in \mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ , on a  ${}^tMM = \mathbf{I}_n$ , donc  $1 = \det(\mathbf{I}_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \det(M) = \det(M)^2$ , i.e.  $\det(M) \in \{\pm 1\}$ .  $\square$

**Définition 2.3.4.** Le groupe *spécial orthogonal* est

$$\mathbf{SO}(E) = \{f \in \mathbf{O}(E), \det(f) = 1\}$$

(lorsque  $E = \mathbf{R}^n$ , on note  $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ ). C'est un sous-groupe (comme noyau du morphisme  $\det$ ) de  $\mathbf{O}(E)$  (resp. de  $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ ). Lorsque  $n \neq 0$ , il est d'indice 2 dans  $\mathbf{O}(E)$ .

2.3.5. *Cas des dimensions 2 et 3.*

**Proposition 2.3.6.** On a  $\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ R_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbf{R} \right\}$ .

*Démonstration.* Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ . On a  ${}^tMM = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$ , donc

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

D'après les deux premières égalités, il existe  $\theta, \theta' \in \mathbf{R}$  tels que

$$\begin{cases} a = \cos(\theta) \\ c = \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} d = \cos(\theta') \\ b = \sin(\theta') \end{cases}$$

La troisième égalité s'écrit alors  $\cos(\theta) \sin(\theta') + \sin(\theta) \cos(\theta') = 0$ , i.e.  $\sin(\theta + \theta') = 0$ . Par ailleurs, on a  $\det(M) = ad - bc = \cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta') = 1$ , i.e.  $\cos(\theta + \theta') = 1$ . Cela implique que  $\theta + \theta' \equiv 0 \pmod{2\pi\mathbf{Z}}$  : comme  $\theta$  et  $\theta'$  sont définis modulo  $2\pi$ , on peut supposer  $\theta' = -\theta$ , et  $M = R_\theta$ . Réciproquement, on a  $R_\theta \in \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$  pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ .  $\square$

**Définition 2.3.7.** La matrice  $R_\theta$  s'appelle la *matrice de rotation* d'angle  $\theta$ .

**Proposition 2.3.8.** L'application

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) \\ \theta &\mapsto R_\theta \end{aligned}$$

est un morphisme surjectif de groupes. Son noyau est  $2\pi\mathbf{Z}$ . En particulier,  $\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$  est commutatif.

*Démonstration.* La surjectivité résulte de la proposition précédente. Pour voir que c'est un morphisme de groupes, il s'agit de montrer que  $(\forall \theta, \theta' \in \mathbf{R}) R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$  ce qui résulte immédiatement du calcul. Enfin, on a  $R_\theta = \mathbf{I}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = 1 \\ \sin(\theta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \pmod{2\pi\mathbf{Z}}$ .  $\square$

Soit  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_2(\mathbf{R}) \setminus \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ . C'est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à  $\mathbf{R} \times \{0\}$ .

**Proposition 2.3.9.** On a

$$\mathbf{O}_2(\mathbf{R}) = \mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) \amalg \Sigma \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$$

Tout élément de  $\Sigma \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$  est une réflexion (=symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle).

*Démonstration.* Soit  $M \in \mathbf{O}_2(\mathbf{R}) \setminus \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$  : on a  $\det(M) = -1$ , donc  $\det(\Sigma M) = 1$ , de sorte que  $\Omega = \Sigma M \in \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ , et  $M = \Sigma \Omega \in \Sigma \mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ .

Si  $\theta \in \mathbf{R}$ , on a  $\Sigma R_\theta \Sigma = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R_{-\theta}$ , si bien que  $(\Sigma R_\theta)^2 = R_{-\theta} R_\theta = R_0 = \mathbf{I}_2$ , et  $\Sigma R_\theta$  est une matrice de symétrie orthogonale, forcément par rapport à une droite vu que son déterminant vaut  $-1$ .  $\square$

**Remarque.** (1) Il résulte de la proposition qui précède que les isométries (vectorielles) du plan sont de deux types : les rotations (ce sont celles de déterminant 1) et les réflexions (ce sont celles de déterminant  $-1$ ).

(2) En utilisant le déterminant on voit que la composée de deux rotations ou de deux réflexions est une rotation, et que la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion. Par exemple, on a

$$(\Sigma R_\theta)(\Sigma R_{\theta'}) = (\Sigma R_\theta \Sigma) R_{\theta'} = R_{-\theta} R_{\theta'} = R_{\theta' - \theta}$$

ce qui montre en particulier que toute rotation peut s'écrire comme composée de deux réflexions.

(3) Le groupe  $\mathbf{O}_2(\mathbf{R})$  n'est pas commutatif, sinon on aurait  $R_{-\theta} = \Sigma R_\theta \Sigma = \Sigma^2 R_\theta = R_\theta$  pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ , ce qui n'est pas.

**Proposition 2.3.10.** Si  $\Omega \in \mathbf{SO}_3(\mathbf{R})$ , il existe  $U \in \mathbf{O}_3(\mathbf{R})$  tel que

$$U^{-1} \Omega U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

c'est une rotation.

*Démonstration.* Le polynôme caractéristique de  $\Omega$  est un polynôme de degré 3 à coefficients réels : il a une racine réelle  $\lambda$ . La restriction de  $\Omega$  au sous-espace propre associé  $F$  est une isométrie : on a  $\lambda \in \{\pm 1\}$ . Comme  $\Omega$  est une isométrie,  $F^\perp$  est stable par  $\Omega$ , qui induit donc une isométrie de  $F^\perp$ . Si  $\dim_{\mathbf{R}}(F) = 3$  on a  $\Omega \in \{\pm \mathbf{I}_3\}$  : on a nécessairement  $\Omega = \mathbf{I}_3$  (car  $\det(\Omega) = 1$ ). Si  $\dim(F) = 2$ , alors  $\dim(F^\perp) = 1$  et  $\Omega$  est diagonalisable en base orthonormée : il existe  $U \in \mathbf{O}_3(\mathbf{R})$  telle que  $U^{-1} \Omega U \in \{\text{diag}(1, -1, -1), \text{diag}(1, 1, -1)\}$  et donc  $U^{-1} \Omega U = \text{diag}(1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\pi \end{pmatrix}$  (car  $\det(\Omega) = 1$ ). Si  $\dim_{\mathbf{R}}(F) = 1$ , alors  $F^\perp$  est un plan vectoriel : il existe  $U \in \mathbf{O}_3(\mathbf{R})$  telle que  $U^{-1} \Omega U = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$  avec  $M \in \mathbf{O}_2(\mathbf{R})$ . On a  $\lambda \det(M) = 1$ , i.e.  $\det(M) = \lambda$  : si  $\lambda = -1$ , alors  $\det(M) = -1$ , et  $M$  est une réflexion, et admet donc  $-1$  comme valeur propre, ce qui contredit  $\dim_{\mathbf{R}}(F) = 1$ . On a donc nécessairement  $\lambda = 1$  et  $M = R_\theta$  avec  $\theta \in \mathbf{R}$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

## 2.4. Espaces affines euclidiens.

**Définition 2.4.1.** Un *espace affine euclidien* est un espace affine réel dont la direction est un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

Dans tout ce qui suit,  $\mathcal{E}$  désigne un espace affine euclidien et  $E$  sa direction, dont on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire, et  $\|\cdot\|$  la norme associée.

**Définition 2.4.2.** On définit la *distance* (euclidienne) sur  $\mathcal{E}$  par la formule

$$d(a, b) = \|\vec{ab}\|$$

Elle vérifie bien les propriétés des distances, pour mémoire :

- (i)  $(\forall a, b \in \mathcal{E}) d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$  (séparation) ;
- (ii)  $(\forall a, b \in \mathcal{E}) d(a, b) = d(b, a)$  (symétrie) ;
- (iii)  $(\forall a, b, c \in \mathcal{E}) d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$  (inégalité triangulaire).

Les notions attachées aux espaces vectoriels euclidiens se transmettent aux espaces affines euclidiens .

**Définition 2.4.3.** (1) Deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  sont *orthogonaux* lorsque leurs directions sont orthogonales (dans  $E$ ).

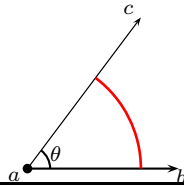
- (2) Un repère  $(\omega, (e_i)_{i \in I})$  de  $\mathcal{E}$  est dit *orthogonal* (resp. *orthonormal*) lorsque la base sous-jacente l'est.

**Définition 2.4.4.** (Mesure des angles non orientés). Soient  $a, b, c \in \mathcal{E}$  deux-à-deux distincts. On a  $|\langle \vec{ab} | \vec{ac} \rangle| \leq \|\vec{ab}\| \|\vec{ac}\|$  : il existe  $\theta \in [0, \pi]$  unique<sup>a</sup> tel que

$$\langle \vec{ab} | \vec{ac} \rangle = \|\vec{ab}\| \|\vec{ac}\| \cos(\theta)$$

Le réel  $\theta$  s'appelle l'*angle non orienté* de  $\vec{ab}$  et  $\vec{ac}$ . Si  $\|\vec{ab}\| = \|\vec{ac}\| = R$ , la longueur du petit arc de cercle de centre  $a$  et de rayon  $R$ , qui relie  $b$  et  $c$  vaut  $R\theta$ .

<sup>a</sup>. Rappelons que la fonction cos induit une bijection  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ .

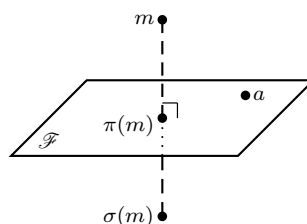


**Définition 2.4.5.** Soit  $\mathcal{F} = a + F$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ . La *projection orthogonale* sur  $\mathcal{F}$  est l'application affine  $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  telle que  $\pi(a) = a$  et  $\vec{\pi}$  est la projection orthogonale (vectorielle) sur  $F$ , soit encore la projection sur  $\mathcal{F}$  parallèlement à la direction  $F^\perp$ . Comme sa restriction à  $\mathcal{F}$  est l'identité, cette définition ne dépend pas du choix de  $a \in \mathcal{F}$ .

De même, on définit la *symétrie orthogonale* par rapport à  $\mathcal{F}$  comme l'unique application affine  $\sigma$  dont la restriction à  $\mathcal{F}$  est l'identité, et telle que  $\vec{\sigma}$  soit la symétrie orthogonale par rapport à  $F$ .

**Exemple 2.5.** Plaçons-nous dans le cas où  $\mathcal{F}$  est un hyperplan affine : soit  $\vec{u} \in F^\perp \setminus \{0\}$ , on a  $F^\perp = \mathbf{R}\vec{u}$ . Si  $m \in \mathcal{E}$ , on a  $m = a + \vec{am}_1 + \vec{am}_2$  avec  $\vec{am}_1 \in F$  et  $\vec{am}_2 \in F^\perp$ . On a  $\langle \vec{am} | \vec{u} \rangle = \langle \vec{am}_2 | \vec{u} \rangle$ , donc  $\vec{am}_2 = \langle \vec{am}_2 | \vec{u} \rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ , si bien que  $\pi(m) = m_1 = a + \vec{am}_1$  donc

$$\pi(m) = m - \langle \vec{am}_2 | \vec{u} \rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \quad \text{et} \quad \sigma(m) = m - 2 \langle \vec{am}_2 | \vec{u} \rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$



**Définition 2.5.1.** Soit  $\mathcal{F}$  un espace affine euclidien. Une application affine  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est une *isométrie* (affine) si elle conserve les distances, *i.e.*

$$(\forall a, b \in \mathcal{E}) d_{\mathcal{F}}(f(a), f(b)) = d_{\mathcal{E}}(a, b)$$

**Remarque.** (1) Toute translation est une isométrie.

(2) Bien entendu, un composé d'isométries affines est une isométrie affine, et si une isométrie affine est bijective, son inverse est aussi une isométrie affine.

**Proposition 2.5.2.** Une application affine  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est une isométrie affine si et seulement si  $\vec{f}: E \rightarrow F$  est une isométrie vectorielle.

*Démonstration.* La distance  $d_{\mathcal{F}}(f(a), f(b)) = \left\| \overrightarrow{f(a)f(b)} \right\|_F = \left\| \vec{f}(\overrightarrow{ab}) \right\|_F$  est égale à la distance  $d_{\mathcal{E}}(a, b) = \|\overrightarrow{ab}\|_E$  pour tout  $a, b \in \mathcal{E}$  si et seulement si  $\vec{f}$  est une isométrie vectorielle.  $\square$

**Définition 2.5.3.** (1) Une *similitude affine* est une application affine  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  telle que  $\vec{f}$  soit une similitude vectorielle, *i.e.*  $\vec{f} \in \mathbf{R}^\times \mathbf{O}(E)$ .

(2) Deux parties  $A, B \subset \mathcal{E}$  sont *semblables* s'il existe  $f \in \text{Sim}(\mathcal{E})$  tel que  $f(A) = B$ .

**Proposition 2.5.4.** L'ensemble des isométries (resp. des similitudes) de  $\mathcal{E}$  dans lui-même forme un sous-groupe de  $\text{GA}(\mathcal{E})$ . On le note  $\text{Is}(\mathcal{E})$  (resp.  $\text{Sim}(\mathcal{E})$ ).

Le morphisme  $\Psi: \text{GA}(\mathcal{E}) \rightarrow \text{GL}(E)$  induit un morphisme surjectif

$$\text{Is}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{O}(E) \quad (\text{resp. } \text{Sim}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{R}^\times \mathbf{O}(E))$$

dont le noyau est  $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ .

*Démonstration.* On sait déjà que  $\text{Ker}(\Psi) = \mathcal{T}(\mathcal{E}) \subset \text{Is}(\mathcal{E})$  : il s'agit de voir que l'application  $\text{Is}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{O}(E)$  (bien définie en vertu de la proposition précédente) est surjective, mais cela résulte de la surjectivité de  $\Psi$  et de la proposition précédente. Idem pour  $\text{Sim}(\mathcal{E})$ .  $\square$

**Théorème 2.5.5.** Si  $f \in \text{Is}(\mathcal{E})$ , il existe un unique couple  $(g, \tau) \in \text{Is}(\mathcal{E}) \times \mathcal{T}(\mathcal{E})$  tel que

$$\begin{cases} f = \tau \circ g = g \circ \tau \\ \text{Fix}(g) = \{m \in \mathcal{E}, g(m) = m\} \neq \emptyset \\ \tau = \tau_{\vec{x}} \text{ avec } \vec{x} \in F := \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_E) \end{cases}$$

*Démonstration.* Soient  $a \in \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{W} = a + F^\perp$  et  $\mathcal{W}' = f(\mathcal{W})$ . Comme  $\vec{f} \in \mathbf{O}(E)$  et  $\vec{f}(F) = F$ , on a  $\vec{f}(F^\perp) = F^\perp$ , de sorte que  $\mathcal{W}' = f(a) + F^\perp$  est parallèle à  $\mathcal{W}$ . On note  $a' \in \mathcal{W}'$  le projeté orthogonal de  $a$  sur  $\mathcal{W}'$  : on a  $\mathcal{W}' = a' + F^\perp$  et  $\overrightarrow{aa'} \in (F^\perp)^\perp = F$ .

*Unicité.* Supposons qu'une telle décomposition existe. On a nécessairement  $\vec{g} = \vec{f}$ . On a  $g(\mathcal{W}) = g(a) + \vec{g}(F^\perp) = g(a) + \vec{f}(F^\perp) = g(a) + F^\perp$ . Montrons que  $g(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ , *i.e.* que  $g(a) + F^\perp = a + F^\perp$ , soit encore  $ag(a) \in F^\perp$ . Fixons  $\omega \in \text{Fix}(g)$ , et soit  $\vec{v} \in F$ . On a

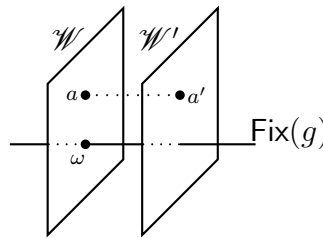
$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{ag(a)} | \vec{v} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{a\omega} | \vec{v} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\omega g(a)} | \vec{v} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{a\omega} | \vec{v} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{g(\omega)g(a)} | \vec{g}(\vec{v}) \right\rangle \quad (\text{parce que } g(\omega) = \omega \text{ et } \vec{v} \in F = \text{Ker}(\vec{g} - \text{Id}_E)) \\ &= \left\langle \overrightarrow{a\omega} | \vec{v} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\omega a} | \vec{v} \right\rangle = 0 \quad (\text{parce que } \vec{g} \in \mathbf{O}(E)) \end{aligned}$$

Ce qui implique bien que  $g(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ , et donc  $\mathcal{W}' = f(\mathcal{W}) = \tau(g(\mathcal{W})) = \tau(\mathcal{W})$  i.e.  $a' + F^\perp = a + \vec{x} + F^\perp$ , soit  $\vec{aa}' - \vec{x} \in F^\perp$ . Comme  $\vec{aa}' - \vec{x} \in F$  et  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , on a donc nécessairement  $\vec{x} = \vec{aa}'$  ce qui prouve l'unicité de  $\tau = \tau_{\vec{x}}$ , et donc celle de  $g = \tau^{-1} \circ f$ .

**Existence.** Soient  $\tau$  la translation de vecteur  $\vec{x} = \vec{aa}' \in F$  et  $g = \tau^{-1} \circ f$ . On a  $\vec{g} = \vec{f}$  (donc  $g \in \text{Is}(\mathcal{E})$ ) et  $g(\mathcal{W}) = \tau^{-1}(\mathcal{W}') = \tau^{-1}(a' + F^\perp) = a + F^\perp = \mathcal{W}$ . Cela implique que  $g$  induit une application affine  $g|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ . On a bien sûr  $\vec{g}|_{\mathcal{W}} = \vec{g}|_{F^\perp} = \vec{f}|_{F^\perp}$ , de sorte que  $1 \notin \text{Sp}(\vec{g}|_{\mathcal{W}})$  (parce que  $F \cap F^\perp = \{0\}$ ), ce qui implique que  $g|_{\mathcal{W}}$  admet un unique point fixe  $\omega \in \mathcal{W}$ . C'est donc aussi un point fixe de  $g$ , ce qui prouve que  $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$ . En particulier, on a  $\text{Fix}(g) = \omega + \text{Ker}(\vec{g} - \text{Id}_E) = \omega + F$ . On a alors

$$(\forall m \in \mathcal{E}) g(\tau(m)) = g(m + \vec{x}) = g(m) + \vec{g}(\vec{x}) = g(m) + \vec{x} = \tau(g(m)) = f(m)$$

(parce que  $\vec{x} \in F = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_E) = \text{Ker}(\vec{g} - \text{Id}_E)$ , ce qui prouve que  $f = \tau \circ g = g \circ \tau$  : on a fini.  $\square$ )



**Remarque.** Bien entendu, cet énoncé n'a d'intérêt que lorsque  $F = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_E) \neq \{0\}$  : dans le cas contraire,  $f$  a un unique point fixe, donc  $f = g$  et  $\vec{x} = \vec{0}$ .

Fixons  $\mathfrak{B}_0$  une base orthonormale de  $E$ . Cela fournit un isomorphisme  $\varphi : \text{O}_n(\mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} \text{O}(E)$ . Si  $\mathfrak{B}$  est une base de  $E$ , on dit qu'elle est *directe* (resp. *indirecte*) si le déterminant de la matrice de passage de  $\mathfrak{B}_0$  à  $\mathfrak{B}$  appartient à  $\mathbf{R}_{>0}$  (resp.  $\mathbf{R}_{<0}$ ). Cela établit une dichotomie sur l'ensemble des bases : on a fixé une *orientation* de  $E$ . On pose alors  $\text{SO}(E) = \varphi(\text{SO}_n(\mathbf{R}))$ . Remarquons que cette définition n'a de sens qu'une fois une base de référence fixée ; en particulier elle n'est pas canonique.

Posons  $\text{Is}^+(\mathcal{E}) = \Psi^{-1}(\text{SO}(E))$  et  $\text{Is}^-(\mathcal{E}) = \Psi^{-1}(\text{O}(E) \setminus \text{SO}(E))$ . Bien sûr  $\text{Is}^+(\mathcal{E})$  est un sous-groupe de  $\text{Is}(\mathcal{E})$  contenant  $\mathcal{T}(\mathcal{E})$  (par contre  $\text{Is}^-(\mathcal{E})$  n'est pas un groupe pour la composition), et

$$\text{Is}(\mathcal{E}) = \text{Is}^+(\mathcal{E}) \amalg \text{Is}^-(\mathcal{E})$$

**Définition 2.5.6.** Les éléments de  $\text{Is}^+(\mathcal{E})$  (resp.  $\text{Is}^-(\mathcal{E})$ ) s'appellent les *déplacements* (resp. *antidéplacements*) de  $\mathcal{E}$ .

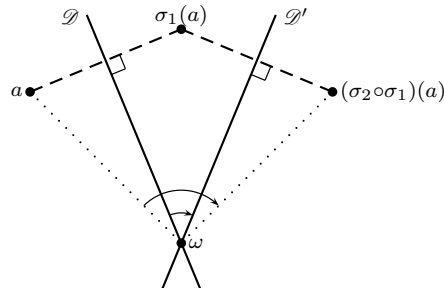
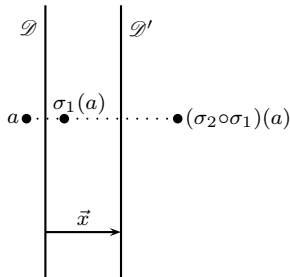
2.5.7. *Classification des isométries en dimension 2.* Elle est résumée par le tableau suivant, qu'il est aisé de dresser (en utilisant le théorème précédent pour le cas  $\text{Is}^-(\mathcal{E})$ ).

$f$	$\vec{f}$	points fixes de $f$	nature de $f$
$\text{Is}^+(\mathcal{E})$	$R_\theta$ avec $\theta \notin 2\pi\mathbf{Z}$	$\{\omega\}$	rotation de centre $\omega$ et d'angle $\theta$
	$\text{Id}$	$\emptyset$ ou $\mathcal{E}$	translation
$\text{Is}^-(\mathcal{E})$	réflexion d'axe $D$	droite affine $\mathcal{D} = a + D$	réflexion d'axe $\mathcal{D}$
		$\emptyset$	symétrie glissée : composée d'une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur $\vec{x} \in D \setminus \{0\}$

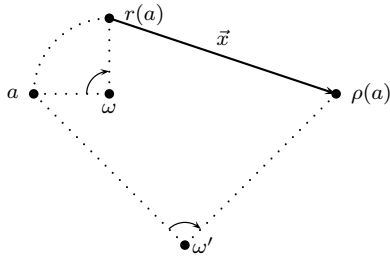
Il est alors facile de déterminer la nature d'une composée d'isométries, en déterminant l'application linéaire associée (composée des applications linéaires associées), puis les points fixes (vide ou sous-espace affine de direction le sous-espace propre pour la valeur propre 1 de l'application linéaire associée).

**Exemple 2.6.** (1) La composée de deux réflexions d'axes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  est :

- la translation de vecteur  $2\vec{x}$  si  $\mathcal{D}' = \mathcal{D} + \vec{x}$  avec  $\vec{x} \in D^\perp$  (i.e. lorsque  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles) ;
- la rotation de centre  $\{\omega\} = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$  et d'angle deux fois l'angle entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  si elles ne sont pas parallèles.

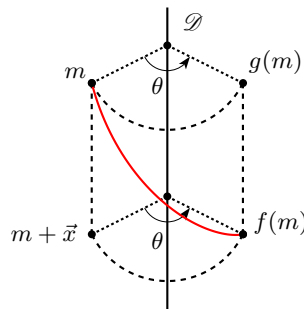


(2) La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul est une rotation de même angle.



Si  $r$  est la rotation de centre  $\omega$  et d'angle  $\theta \notin 2\pi \mathbf{Z}$ , et  $\tau = \tau_{\vec{x}}$ , alors  $\tau \circ r = \rho$  est la rotation de centre  $\omega'$  et d'angle  $\theta'$ , où  $\omega'$  est l'unique point tel que  $\omega' = \tau(r(\omega'))$  i.e.  $\omega' = \omega + \vec{r}(\overrightarrow{\omega\omega'}) + \vec{x}$ , soit  $(\text{Id} - \vec{r})(\overrightarrow{\omega\omega'}) = \vec{x}$  c'est-à-dire  $\omega' = \omega + (\text{Id} - \vec{r})^{-1}(\vec{x})$  (comme  $\theta \notin 2\pi \mathbf{Z}$ , 1 n'est pas valeur propre de  $\vec{r}$ ).

**Remarque.** Déplacements en dimension 3. Supposons  $\dim(\mathcal{E}) = 3$  et soit  $f \in \text{Is}^+(\mathcal{E})$ . Si  $\vec{f} = \text{Id}_E$ , alors  $f$  est une translation : supposons désormais que  $\vec{f} \neq \text{Id}_E$ . D'après la proposition 2.3.10, il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $\vec{f}$  est  $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  (on a  $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi \mathbf{Z}}$  parce que  $\vec{f} \neq \text{Id}_E$ ). Soit  $D = \text{Ker}(\vec{f} - \text{Id}_E)$  : c'est une droite vectorielle, et  $\vec{f}$  est la rotation d'axe  $D$  et d'angle  $\theta$ . D'après le théorème 2.5.5, il existe  $g \in \text{Is}(\mathcal{E})$  et  $\vec{x} \in D$  tels que si  $\tau = \tau_{\vec{x}}$ , on a  $f = \tau \circ g = g \circ \tau$  et  $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$ . On a  $\vec{g} = \vec{f}$  : comme  $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$ ,  $\text{Fix}(g)$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  de direction  $\text{Ker}(\vec{g} - \text{Id}_E) = D$ . Il existe donc  $\omega \in \mathcal{E}$  tel que  $\text{Fix}(g) = \mathcal{D} = \omega + D$ . L'application  $g$  est donc la rotation d'axe  $\mathcal{D}$  et d'angle  $\theta$ . Le composé  $f = \tau \circ g = g \circ \tau$  s'appelle un *vissage*.



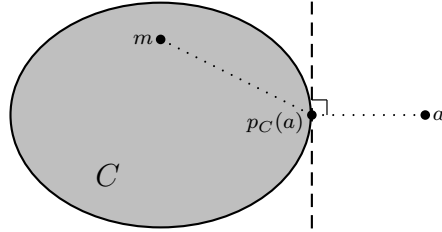
2.6.1. *Projection orthogonale sur un convexe fermé.* Supposons  $\mathcal{E}$  de dimension finie et soit  $C \subseteq \mathcal{E}$  une partie convexe et fermée.



**Théorème 2.6.2.** Si  $a \in \mathcal{E}$ , il existe  $p_C(a) \in C$  unique tel que :

$$(\forall m \in C) d(a, m) \geq d(a, p_C(a))$$

en outre,  $p_C(a)$  est l'unique point de  $C$  vérifiant  $(\forall m \in C) \langle \overrightarrow{p_C(a)a} | \overrightarrow{p_C(a)m} \rangle \leq 0$ .



*Démonstration.* Soit  $\delta = d(a, C) = \inf\{d(a, m), m \in C\}$  : pour tout  $n \in \mathbf{N}_{>0}$ , l'ensemble  $F_n = C \cap \overline{\mathbf{B}}(a, \delta + \frac{1}{n})$  est non vide, convexe et fermé. La suite  $\{F_n\}_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$  est décroissante : montrons que la suite des diamètres tend vers 0.

Soient  $m, m' \in F_n$ . En appliquant l'égalité du parallélogramme  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$  avec  $\vec{u} = \overrightarrow{am'} + \overrightarrow{am}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{am'} - \overrightarrow{am} = \overrightarrow{mm'}$ , on a

$$2 \|\overrightarrow{mm'}\|^2 + 2 \|\overrightarrow{am'} + \overrightarrow{am}\|^2 = \|\overrightarrow{2am'}\|^2 + \|\overrightarrow{2am}\|^2$$

Si  $g$  désigne le milieu de  $[mm']$ , on a  $g \in F_n$ , et

$$2 \|\overrightarrow{mm'}\|^2 + 2 \|\overrightarrow{2ag}\|^2 = 4 \|\overrightarrow{am'}\|^2 + 4 \|\overrightarrow{am}\|^2$$

soit encore

$$(*) \quad d(m, m')^2 + 4d(a, g)^2 = 2d(a, m')^2 + 2d(a, m)^2$$

Comme  $d(a, g) \geq \delta$  et  $d(a, m'), d(a, m) \leq \delta + \frac{1}{n}$ , on a

$$d(m, m')^2 \leq 4\left(\delta + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\delta^2 = \frac{8\delta}{n} + \frac{4}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Cela implique que  $\bigcap_{n>0} F_n = \{p_C(a)\}$  est un singleton. Par construction on a  $d(a, p_C(a)) = \delta \leq d(a, m)$  pour tout  $m \in C$ . Si  $m \in C$  vérifie  $d(a, m) = \delta$ , on a

$$d(m, p_C(a))^2 + 4d(a, g)^2 = 2d(a, p_C(a))^2 + 2d(a, m)^2 = 4\delta^2$$

en appliquant la formule (\*) avec  $m' = p_C(a)$ . Comme  $g \in C$ , on a  $d(a, g) \geq \delta$  : cela implique  $d(m, p_C(a)) = 0$  i.e.  $m = p_C(a)$  et prouve l'unicité de  $p_C(a)$ .

Si  $m \in C$  et  $t \in ]0, 1]$ , on a  $tm + (1-t)p_C(a) \in C$  donc

$$\|a - p_C(a)\| \leq \|a - (tm + (1-t)p_C(a))\| = \|a - p_C(a) - t(m - p_C(a))\|$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|a - p_C(a)\|^2 &\leq \|a - p_C(a) - t(m - p_C(a))\|^2 \\ &\leq \|a - p_C(a)\|^2 - 2t \langle a - p_C(a) | m - p_C(a) \rangle + t^2 \|m - p_C(a)\|^2 \end{aligned}$$

et donc

$$2 \langle a - p_C(a) | m - p_C(a) \rangle \leq t \|m - p_C(a)\|^2$$

en divisant par  $t$ . En faisant tendre  $t$  vers 0, on a bien  $\langle a - p_C(a) | m - p_C(a) \rangle \leq 0$ .

Réciproquement, si  $b \in C$  vérifie  $\langle \vec{ba} | \vec{bm} \rangle \leq 0$  pour tout  $m \in C$ , on a  $\langle \vec{ba} | \vec{bp_C(a)} \rangle \leq 0$ . On a aussi  $\langle \vec{p_C(a)a} | \vec{p_C(a)b} \rangle \leq 0$ , i.e.  $\langle \vec{ap_C(a)} | \vec{bp_C(a)} \rangle \leq 0$ . En additionnant les deux inégalités, il vient  $0 \geq \langle \vec{ba} | \vec{bp_C(a)} \rangle + \langle \vec{ap_C(a)} | \vec{bp_C(a)} \rangle = \langle \vec{ba} + \vec{ap_C(a)} | \vec{bp_C(a)} \rangle = \|\vec{bp_C(a)}\|^2$ , ce qui implique  $b = p_C(a)$ .  $\square$

**Exemple 2.7.** Supposons que  $C$  est un hyperplan affine. Soient  $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$  un vecteur normal à  $C$  (une base de  $C^\perp$ ) et  $m_0 \in C$ . On a alors  $m \in C \Leftrightarrow \varphi(m) := \langle \vec{m_0 m} | \vec{u} \rangle = 0$ . Si  $a \in \mathcal{E}$  et  $m = p_C(a)$ , on a  $\vec{am} = t\vec{u}$  avec  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $\varphi(m) = 0$ . Comme  $\varphi(m) = \varphi(a + t\vec{u}) = \varphi(a) + t\vec{\varphi}(\vec{u}) = \varphi(a) + t\|\vec{u}\|^2$ , on a  $t = -\frac{\varphi(a)}{\|\vec{u}\|^2}$ , de sorte que

$$p_C(a) = a - \left\langle \vec{m_0 a} \middle| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

et  $d(a, C) = \|t\vec{u}\| = |t| \|\vec{u}\|$ , soit

$$d(a, C) = \left| \left\langle \vec{m_0 a} \middle| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \right|$$

Par exemple, si  $\mathfrak{B}$  est un repère cartésien de  $\mathcal{E}$  et  $C$  a pour équation  $\varphi(x) = 0$  dans  $\mathfrak{B}$ , avec  $\varphi(x) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n - b$ , alors

$$d(a, C) = \frac{|\varphi(a)|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}}$$

### 3. NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

**3.1. Compléments sur les nombres complexes.** La série de terme général  $\frac{z^n}{n!}$  est absolument convergente, et la convergence est normale sur tout compact de  $\mathbf{C}$ . Sa somme définit donc une application continue  $\exp: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ .

**Proposition 3.1.1.** Pour tout  $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ , on a  $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$ .

*Démonstration.* Grâce à la convergence absolue, on peut écrire

$$\exp(z_1) \exp(z_2) = \sum_{n,m \in \mathbf{N}} \frac{z_1^n z_2^m}{n! m!} = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n,m \in \mathbf{N} \\ n+m=k}} \binom{n+m}{n} z_1^n z_2^m = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = \exp(z_1 + z_2)$$

$\square$

**Corollaire 3.1.2.** Pour tout  $z \in \mathbf{C}$ , on a  $\exp(z) \neq 0$ , et

$$\exp: (\mathbf{C}, +) \rightarrow (\mathbf{C}^\times, \cdot)$$

est un morphisme de groupes.

*Démonstration.* On a  $\exp(z) \exp(-z) = \exp(0) = 1$ , donc  $\exp(z) \neq 0$ .  $\square$

**Notation.** On pose  $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$  le cercle unité. C'est un sous-groupe de  $\mathbf{C}^\times$ .

**Proposition 3.1.3.** (1) La fonction  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de différentielle la multiplication par  $\exp$ .

(2) La restriction de  $\exp$  à  $\mathbf{R}$  est une bijection strictement croissante  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ .

(3) Pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , on a  $\exp(it) \in \mathbf{U}$ .

*Démonstration.* Si  $z, h \in \mathbf{C}$ , on a  $\exp(z+h) - \exp(z) = \exp(z)(\exp(h) - 1) = \exp(z)h + o(h)$ , ce qui prouve (1). Par définition de  $\exp$ , on a  $\exp(x) \geq 1$  si  $x \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ , de sorte que  $\exp(-x) = \exp(x)^{-1} \in ]0, 1]$  : cela implique que  $\exp(x) \in \mathbf{R}_{>0}$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Grâce à (1), on en déduit que  $\exp|_{\mathbf{R}}$  est strictement croissante. On a bien sûr  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ , ce qui implique que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x)^{-1} = 0$ , et donc que  $\exp(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_{>0}$  par continuité, ce qui prouve (2). Si  $t \in \mathbf{R}$ , on a  $\overline{\exp(it)} = \exp(-it)$  donc  $|\exp(it)| = 1$  : cela prouve (3).  $\square$

**Définition 3.1.4.** Pour  $t \in \mathbf{R}$ , on pose  $\cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$  et  $\sin(t) = \operatorname{Im}(\exp(it))$ .

**Proposition 3.1.5.** Pour tout  $t \in \mathbf{R}$ , on a  $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ . Les fonctions  $\cos, \sin: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et  $\cos' = -\sin$ , et  $\sin' = \cos$ .

*Démonstration.* La première égalité n'est autre que  $|\exp(it)|^2 = 1$ . Comme  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , il en est de même de  $\sin$  et  $\cos$ . En dérivant la *formule d'Euler*  $\exp(it) = \cos(t) + i \sin(t)$ , on a  $i \exp(it) = \cos'(t) + i \sin'(t)$ , ce qui implique  $\cos' = -\sin$ , et  $\sin' = \cos$ .  $\square$

**Proposition 3.1.6.** (1) Il existe  $\pi \in \mathbf{R}_{>0}$  tel que  $\exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i$  et  $\exp(z) = 1 \Leftrightarrow z \in 2i\pi \mathbf{Z}$ .

(2) L'application

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{U} \\ t &\mapsto \exp(it) \end{aligned}$$

est un morphisme surjectif de groupes, de noyau  $2\pi \mathbf{Z}$ .

(3) L'application  $\exp: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^\times$  est surjective, de noyau  $2i\pi \mathbf{Z}$ .

*Démonstration.* On a  $\cos(0) = 1$ . Par ailleurs, on a  $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots$  : la série  $\cos(2)$  est alternée. On a donc  $\cos(2) < 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3}$  : comme  $\cos$  est continue, elle s'annule sur  $]0, 2[$ . Soit  $t_0$  sa plus petite racine : on pose  $\pi = 2t_0 \in ]0, 4[$ . On a  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , donc  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$ , et donc  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  parce que  $\sin(0) = 0$  et  $\sin$  est croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  (puisque  $\cos = \sin'$  est positif sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par définition de  $\pi$ ). On a donc  $\exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i$ . En particulier, on a  $\exp(2i\pi) = i^4 = 1$ , ce qui implique que  $\exp(z + 2i\pi) = \exp(z) \exp(2i\pi) = \exp(z)$  : la fonction  $\exp$  est  $2i\pi$ -périodique.

Réciproquement, soit  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $\exp(z) = 1$ . Écrivons  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbf{R}$ . On a  $\exp(z) = \exp(x) \exp(iy)$  donc  $1 = |\exp(z)| = \exp(x)$ . Comme  $\exp|_{\mathbf{R}}$  est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$  et  $\exp(0) = 1$ , on a nécessairement  $x = 0$ . Montrons que  $y \in 2\pi \mathbf{Z}$ . Comme  $\exp(2i\pi) = 1$ , on peut supposer que  $0 \leq y < 2\pi$ , quitte à translater  $y$  par un multiple entier de  $2\pi$ . Écrivons  $\exp\left(\frac{iy}{4}\right) = u + iv$ . Comme  $0 \leq \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2}$ , on a  $u = \cos\left(\frac{y}{4}\right) > 0$  et  $v = \sin\left(\frac{y}{4}\right) \geq 0$ . Par ailleurs, on a  $(u+iv)^4 = 1$ , i.e.  $u^4 - 6u^2v^2 + v^4 = 1$  et  $4u^3v - 4uv^3 = 0$ . Si  $v \neq 0$ , on a  $uv \neq 0$ , donc  $u^2 = v^2$ , d'où  $-4u^4 = 1$ , ce qui est absurde : on a  $v = 0$  et  $u = 1$ , ce qui implique  $\frac{y}{4} = 0$ , i.e.  $y = 0$ , ce qui achève de prouver (1).

Pour (2), on sait désormais que le noyau est  $2\pi \mathbf{Z}$  : montrons la surjectivité. Soit  $z \in \mathbf{U}$  : écrivons-le  $z = x + iy$ . Si  $x \geq 0$ , il existe  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  unique tel que  $x = \cos(t)$  : comme  $x^2 + y^2 = 1 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$ , on a  $y = \pm \sin(t)$ . Si  $y \geq 0$ , on a  $y = \sin(t)$  et  $z = \exp(it)$ . Si  $y \leq 0$ , on a  $y = \sin(-t)$  et  $z = \exp(-it)$ . Si  $x \leq 0$ , on a  $\varepsilon iz = -\varepsilon y + i\varepsilon x$  pour tout  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ . Choisissons  $\varepsilon$  tel que  $-\varepsilon y \geq 0$  : il existe  $t \in \mathbf{R}$  tel que  $\varepsilon iz = \exp(it)$  d'après ce qui précède. Comme  $i = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)$  et  $-1 = \exp(i\pi)$ , on a  $z \in \exp(i\mathbf{R})$  dans ce cas aussi.

Pour (3), il reste à voir la surjectivité de  $\exp: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^\times$  : soit  $z \in \mathbf{C}^\times$ . Comme  $|z| \in \mathbf{R}_{>0}$  et  $\exp|_{\mathbf{R}}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$  est surjective, il existe  $x \in \mathbf{R}$  tel que  $\exp(x) = |z|$  : on a  $\exp(-x)z \in \mathbf{U}$ . D'après (2), il existe donc  $y \in \mathbf{R}$  tel que  $\exp(-x)z = \exp(iy)$ , de sorte que  $z = \exp(x + iy)$  et on a fini.  $\square$

**Définition 3.1.7.** Pour tout  $z \in \mathbf{C}^\times$ , on peut écrire  $z = |z| \exp(i\theta)$  avec  $\theta \in \mathbf{R}$  uniquement déterminé modulo  $2\pi \mathbf{Z}$ . La classe  $\theta + 2\pi \mathbf{Z}$  s'appelle l'*argument* de  $z$ , on le note  $\arg(z)$ . On peut toujours choisir  $\theta$  dans  $] -\pi, \pi]$ . Ce choix est alors unique : on l'appelle l'*argument principal* de  $z$ .

**3.2. Le plan complexe.** Dans un plan affine euclidien  $\mathcal{P}$ , le choix d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  permet d'identifier  $\mathcal{P}$  à l'espace affine euclidien  $\mathbf{R}^2$ , soit encore à  $\mathbf{C}$  vu comme espace affine (réel) sur lui-même, muni de la structure euclidienne donnée par la norme.

**Définition 3.2.1.** Avec l'identification entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathbf{C}$  qui précède, le nombre complexe  $x + iy$ , qui correspond au point  $A = O + x\vec{i} + y\vec{j}$ , s'appelle l'*affiche* de  $A$  (elle <sup>a</sup> dépend bien entendu du choix du repère orthonormé dont on est partis).

*a.* En mathématiques, le mot affiche est féminin (alors qu'il est masculin en linguistique).

Dans ce qui suit, on se place d'emblée dans le plan complexe, dans lequel un point coïncide avec son affiche. Comme on va le voir, ce modèle « du » plan affine réel est très commode.

On a les formules suivantes :

- (1)  $(\forall a, b \in \mathbf{C}) \quad \|b - a\| = |b - a|$  ;
- (2)  $(\forall a, b \in \mathbf{C}) \quad \langle a|b \rangle = \operatorname{Re}(a\bar{b}) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b)$ .

Si  $a \in \mathbf{C}^\times$ , posons

$$\begin{aligned} m_a: \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C} \\ z &\mapsto az \end{aligned}$$

Considérant  $\mathbf{C}$  comme  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, l'application  $m_a$  est  $\mathbf{R}$ -linéaire, bijective (d'inverse  $m_{a^{-1}}$ ). Son interprétation géométrique est particulièrement agréable : si  $a \in \mathbf{R}^\times$ , ce n'est autre que l'homothétie de rapport  $a$ . Si  $a = \exp(i\theta) \in \mathbf{U}$ , elle s'identifie à  $R_\theta$ , la rotation d'angle  $\theta$ . Plus généralement :

**Proposition 3.2.2.** L'endomorphisme  $m_a$  est la similitude (vectorielle) directe d'angle  $\arg(a)$  et de rapport  $|a|$ .

*Démonstration.* Comme  $a = |a| \exp(i \arg(a))$ , on a  $m_a = m_{|a|} \circ m_{\exp(i \arg(a))}$ .  $\square$

**Remarque.** La construction qui précède fournit un isomorphisme de groupes

$$\mathbf{C}^\times \simeq \operatorname{Sim}^+(\mathbf{C})$$

(similitudes directes de  $\mathbf{C}$ ).

Géométriquement, la conjugaison complexe est la réflexion d'axe  $\mathbf{R}$ . On obtient toutes les réflexions (resp. les similitudes indirectes) en la composant avec la multiplication par un élément de  $U$  (resp. de  $\mathbf{C}^\times$ ).

Revenant à la situation affine, on obtient toutes les similitudes en composant les applications qui précèdent avec les translations. On a alors :

**Proposition 3.2.3.** Les similitudes directes de  $\mathbf{C}$  sont les applications de la forme  $z \mapsto az + b$ . Les rotations correspondent au cas  $a \in \mathbf{U}$  les homothéties-translations au cas  $a \in \mathbf{R}$ , les translations au cas  $a = 1$ .

Les similitudes indirectes de  $\mathbf{C}$  sont les applications de la forme  $z \mapsto a\bar{z} + b$ . Les réflexions-translations correspondent au cas  $a \in \mathbf{U}$ .

**Remarque.** Toutes les propriétés concernant la composition des similitudes du plan affine se retrouvent facilement avec cette description.

L'intérêt de ce point de vue est qu'il permet de décrire les application affines en termes de conjugaison, multiplication et addition des nombres complexes, et non plus en termes de matrices.

3.2.4. *Mesure des angles orientés dans un plan euclidien.* Soient  $u, v \in \mathbf{C}^\times$ , que l'on voit comme des vecteurs. On dispose alors de  $z = \frac{v}{u} \in \mathbf{C}^\times$ . Le vecteur  $v$  est alors l'image de  $u$  par la similitude directe d'angle  $\arg(z)$  et de rapport  $|z|$ .

**Définition 3.2.5.** On note  $\widehat{(u, v)}$  l'argument de  $\frac{v}{u}$ . C'est un élément de  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  qu'on appelle la *mesure de l'angle orienté*  $(u, v)$ .

**Remarque.** On prendra garde à ne pas confondre cette notion avec celle d'angle non-orienté définie plus haut. Il est facile de voir le lien entre les deux (exercice).

**Proposition 3.2.6.** Soient  $u, v \in \mathbf{C}^\times$

- (1) (*Relation de Chasles*). Si  $w \in \mathbf{C}^\times$ , on a  $\widehat{(u, w)} + \widehat{(w, v)} = \widehat{(u, v)}$  (dans  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ ).
- (2) On a  $\widehat{(v, u)} = -\widehat{(u, v)}$ .
- (3) Les vecteurs  $u$  et  $v$  sont parallèles (resp. orthogonaux) si et seulement si  $\widehat{(u, v)} \equiv 0 \pmod{\pi\mathbf{Z}}$  (resp.  $\widehat{(u, v)} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi\mathbf{Z}}$ ).
- (4) Une similitude (vectorielle) directe (resp. indirecte) conserve les angles orientés (resp. transforme les angles orientés en leur opposé).

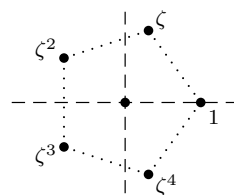
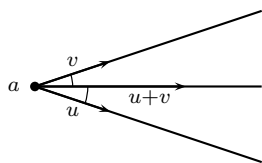
*Démonstration.* (1) (resp. (2)) résulte de l'égalité, immédiate,  $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$  (resp.  $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$ ) dans  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ . (3) est évident. Si  $f$  est une similitude vectorielle de  $\mathbf{C}$ , elle s'écrit  $f(z) = az$  ou  $f(z) = a\bar{z}$  avec  $a \in \mathbf{C}^\times$ , suivant qu'elle est directe ou indirecte. Dans le premier cas, on a  $\widehat{(f(u), f(v))} = \widehat{(au, av)} = \widehat{(u, v)}$ , dans le deuxième, on a  $\widehat{(f(u), f(v))} = \widehat{(a\bar{u}, a\bar{v})} = \arg\left(\frac{\bar{v}}{\bar{u}}\right) = -\arg\left(\frac{v}{u}\right) = -\widehat{(u, v)}$ , ce qui prouve (4).  $\square$

**Remarque.** Bien entendu, ce qui précède, énoncé pour les vecteurs du  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $\mathbf{C}$ , s'étendent de façon immédiate à tout  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel euclidien de dimension 2.

Soient  $u, v \in \mathbf{U}$  (ce sont donc des vecteurs unitaires et  $n \in \mathbf{N}_{>0}$ ). Il est facile de diviser l'angle orienté  $(u, v)$  en  $n$  parties égales : écrivons  $\frac{v}{u} = \exp(i\theta)$ , avec  $\theta = \widehat{(u, v)}$ . Pour  $k \in \{0, \dots, n\}$ , posons  $w_k = u \exp\left(i\frac{k\theta}{n}\right)$  : on a  $w_0 = u$  et  $w_n = v$ , et pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $\widehat{(w_{k-1}, w_k)} = \frac{\theta}{n}$ .

Dans le cas où  $n = 2$ , cela permet de définir la *bissectrice intérieure* de  $a + \mathbf{R}_{\geq 0}u$  et  $a + \mathbf{R}_{\geq 0}v$  (ce n'est autre que  $\mathbf{R}(u + v)$  lorsque  $v \neq -u$ , et  $\mathbf{R}iu = \mathbf{R}u^\perp$  lorsque  $v = -u$ ). Ce qui précède permet aussi de construire « le  $2^e$  » polygone régulier à  $n$  côtés : soit  $\zeta = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$ . Les points  $\{\zeta^k\}_{0 \leq k < n}$  sont ses sommets.

2. Il est unique à similitude directe près.



3.2.7. *Droites et cercles.* Soient  $z_0$  et  $\omega \in \mathbf{C}^\times$ . Le point d'affixe  $z \in \mathbf{C}$  appartient à la droite affine passant par  $z_0$  et orthogonale à  $\omega$  si et seulement si  $\langle w|z - z_0 \rangle = 0$  i.e.  $\langle w|z \rangle = \langle w|z_0 \rangle$  : si  $c = 2 \langle w|z_0 \rangle \in \mathbf{R}$ , cela équivaut à  $\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = c$ .

**Proposition 3.2.8.** L'équation d'une droite dans  $\mathbf{C}$  est

$$\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = c$$

avec  $c \in \mathbf{R}$  (elle admet alors  $\omega$  comme vecteur normal).

**Remarque.** Bien entendu, les nombres  $\omega$  et  $c$  sont définis à multiplication par une constante réelle non nulle près.

Soient  $\omega \in \mathbf{C}$  et  $r \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ . Le point d'affixe  $z \in \mathbf{C}$  appartient au cercle de centre  $\omega$  et de rayon  $r$  si et seulement si  $|z - \omega| = r$  i.e.  $|z|^2 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + |\omega|^2 = r^2$ .

**Proposition 3.2.9.** L'équation d'un cercle dans  $\mathbf{C}$  est

$$|z|^2 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2$$

l'affixe du centre est  $\omega$  et son rayon est  $r$ .

On peut aussi décrire les droites et les cercles en termes d'arguments de nombres complexes. Il est par exemple essentiellement évident que si  $\omega \in \mathbf{C}$  et  $\theta \in \mathbf{R}$ ,

$$\{z \in \mathbf{C} \setminus \{\omega\}, \arg(z - \omega) \equiv \theta \pmod{\pi \mathbf{Z}}\}$$

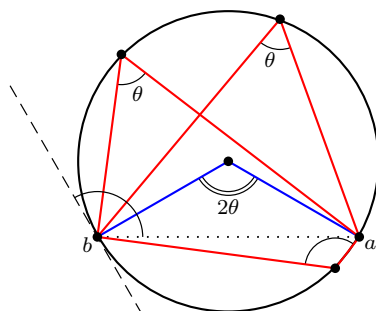
est la droite passant par  $\omega$ , faisant un angle  $\theta$  avec l'axe des abscisses, privée de  $\omega$ .

**Proposition 3.2.10.** Soient  $a, b \in \mathbf{C}$  distincts, et  $\theta \in \mathbf{R}$ . Alors l'ensemble

$$\left\{z \in \mathbf{C} \setminus \{a, b\}, \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \theta \pmod{\pi \mathbf{Z}}\right\}$$

est :

- la droite  $(ab)$  privée de  $a$  et  $b$  si  $\theta \equiv 0 \pmod{\pi \mathbf{Z}}$  ;
- le cercle de centre  $\frac{a+b}{2} - i \cotan(\theta) \frac{b-a}{2}$  et de rayon  $\left| \frac{b-a}{2 \sin(\theta)} \right|$  privé de  $a$  et  $b$  si  $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi \mathbf{Z}}$ .



*Démonstration.* Lorsque  $\theta \equiv 0 \pmod{\pi \mathbf{Z}}$ , on a  $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \in \pi \mathbf{Z}$  si et seulement si les vecteurs  $z - a$  et  $z - b$  sont colinéaires, i.e.  $z \in (ab)$ . Supposons désormais  $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi \mathbf{Z}}$ .

Quitte à translater par le vecteur  $\frac{a+b}{2}$ , et à effectuer une rotation d'angle convenable, on peut supposer que  $a = -b \in \mathbf{R}_{>0}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z-a}{z+a}\right) \equiv \theta \pmod{\pi \mathbf{Z}} &\Leftrightarrow \frac{z-a}{z+a} \in \mathbf{R}^\times e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{z-a}{z+a} = \overline{\left(\frac{z-a}{z+a}\right)} e^{2i\theta} \Leftrightarrow \frac{z-a}{z+a} = \frac{\bar{z}-a}{\bar{z}+a} e^{2i\theta} \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - a\bar{z} + az - a^2 = (|z|^2 + a\bar{z} - az - a^2) e^{2i\theta} \\ &\Leftrightarrow (1 - e^{2i\theta})|z|^2 + a(1 + e^{2i\theta})z - a(1 + e^{2i\theta})\bar{z} - a^2(1 - e^{2i\theta}) = 0 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + a\frac{1+e^{2i\theta}}{1-e^{2i\theta}}z - a\frac{1+e^{2i\theta}}{1-e^{2i\theta}}\bar{z} - a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + ai\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}z - ai\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\bar{z} - a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + |\omega|^2 = r^2 \end{aligned}$$

avec  $\omega = a i \cotan(\theta)$  et  $r^2 - |\omega|^2 = a^2$ , i.e.  $r^2 = a^2(1 + \cotan^2(\theta)) = \left(\frac{a}{\sin(\theta)}\right)^2$  : d'après la proposition précédente, c'est le cercle de centre  $\omega$  et de rayon  $r = \left|\frac{b-a}{2\sin(\theta)}\right|$ , privé des points  $a$  et  $b$ .  $\square$

**Remarque.** (1) Cet énoncé n'est autre que le théorème de l'angle inscrit : deux angles inscrits dans un cercle, interceptant le même arc, ont la même mesure. Il résulte du théorème de l'angle au centre : dans un cercle, un angle au centre mesure le double d'un angle inscrit interceptant le même arc.

(2) Si au lieu de regarder une congruence modulo  $\pi$ , on considère une congruence modulo  $2\pi$ , on obtient un des deux arcs de cercle définis par la corde  $[ab]$ .

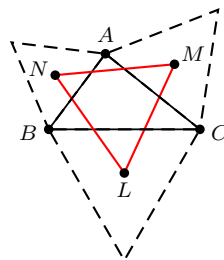
**Corollaire 3.2.11.** Quatre points deux-à-deux distincts d'affixes  $a, b, c, d \in \mathbf{C}$  sont alignés ou cocycliques (=sur un même cercle) si et seulement si

$$\frac{c-a}{c-b} \frac{d-b}{d-a} \in \mathbf{R}$$

*Démonstration.* On a  $\frac{c-a}{c-b} \frac{d-b}{d-a} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right) \pmod{\pi \mathbf{Z}}$  : posons  $\theta = \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right) \in \mathbf{R}$ . Si  $\theta \equiv 0 \pmod{\pi \mathbf{Z}}$ , cela signifie que  $a, b, c$  et  $d$  sont alignés, et si  $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi \mathbf{Z}}$ , cela signifie que  $c$  et  $d$  sont sur le cercle d'équation  $\frac{z-a}{z-b} \equiv \theta \pmod{\pi \mathbf{Z}}$ .  $\square$

3.2.12. *Un exemple : un théorème de Napoléon.* La preuve de l'énoncé suivant illustre comment on utilise les idées de ce chapitre.

**Proposition 3.2.13.** Les centres des triangles équilatéraux extérieurs construits sur les côtés d'un triangle quelconque forment eux-mêmes un triangle équilatéral. En outre, le centre de gravité de ce triangle coïncide avec celui du triangle de départ.



*Démonstration.* Soient  $ABC$  le triangle et  $L, M$  et  $N$  les centres en question. Notons  $a, b, c, l, m, n \in \mathbf{C}$  les affixes respectives de ces points. Par construction,  $A$  est l'image de  $B$  par la rotation de centre  $N$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ , ce qui se traduit par  $a - n = j(b - n)$ . De même,

on a  $b-l = j(c-l)$  et  $c-m = j(a-m)$ . On en déduit  $(1-j)n = a-jb$ ,  $(1-j)l = b-jc$  et  $(1-j)m = c-ja$ . En particulier, on a  $(1-j)(m-n) = (-1-j)a + jb + c = j^2a + jb + c$  et  $(1-j)(l-n) = (1+j)b - jc - a = -j^2b - jc - a$ , et donc  $(1-j)(m-n) = -j^2(1-j)(l-n)$ , soit  $m-n = -j^2(l-n)$  en divisant par  $1-j$ . Comme  $-j^2 = \exp\left(\frac{i\pi}{3}\right)$ , on en déduit que  $M$  est l'image de  $L$  par la rotation de centre  $N$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  : le triangle  $MNL$  est équilatéral.

L'affixe du centre de gravité du triangle  $MNL$  est

$$\frac{m+n+l}{3} = \frac{a-jb+b-jc+c-ja}{3(1-j)} = \frac{a+b+c}{3}$$

ce qui signifie que  $MNL$  et  $ABC$  ont même centre de gravité.  $\square$

#### 4. FIGURES DE BASE DANS LE PLAN

**4.1. Le triangle.** Dans ce paragraphe, on fixe trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés du plan. Un repère orthonormé étant fixé, on note  $a$ ,  $b$  et  $c$  leurs affixes respectifs. On note aussi  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  et  $\theta_C$  les mesures des angles intérieurs en  $A$ ,  $B$  et  $C$  respectivement.

**4.1.1. Points remarquables.** Rappelons que le *centre de gravité* du triangle  $ABC$  est l'isobarycentre  $G$  de  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Son affixe est  $g = \frac{a+b+c}{3}$ .

**Définition 4.1.2.** Une *médiane* du triangle  $ABC$  est une droite passant par un sommet et le milieu du côté opposé.

**Proposition 4.1.3.** Les trois médianes sont concourantes, et leur point d'intersection est le centre de gravité  $G$ .

*Démonstration.* On a  $g = \text{Bar}((a, 1), (b, 1), (c, 1)) = \text{Bar}((a, 1), (\frac{b+c}{2}, 2))$ , de sorte que  $G$  appartient à la droite passant par  $A$  et le milieu de  $[BC]$ , *i.e.* la médiane issue de  $A$ . De même,  $G$  appartient aux deux autres médianes : les médianes sont concourantes en  $G$ .  $\square$

**Définition 4.1.4.** La *médiatrice* d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu. Les *médiatrices* du triangle  $ABC$  sont les médiatrices de ses côtés.

**Proposition 4.1.5.** Les trois médiatrices sont concourantes, et leur point d'intersection est le centre du *cercle circonscrit* au triangle.

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  l'intersection des médiatrices des segments  $[AB]$  et  $[BC]$ . On a donc  $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ , de sorte que  $\Omega$  appartient aussi à la médiatrice du segment  $[AC]$ . Les trois médiatrices du triangle sont donc concourantes, et  $A$ ,  $B$  et  $C$  appartiennent au cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $\Omega A$ , le cercle circonscrit du triangle  $ABC$ .  $\square$

**Remarque.** On peut montrer que  $\Omega$  est le barycentre de  $(A, \sin(2\theta_A))$ ,  $(B, \sin(2\theta_B))$  et  $(C, \sin(2\theta_C))$ .

**Définition 4.1.6.** Une *hauteur* du triangle  $ABC$  est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

**Proposition 4.1.7.** Les trois hauteurs sont concourantes. Leur point d'intersection s'appelle l'*orthocentre* du triangle.



*Démonstration.* Pour tout point  $M$  du plan, on a

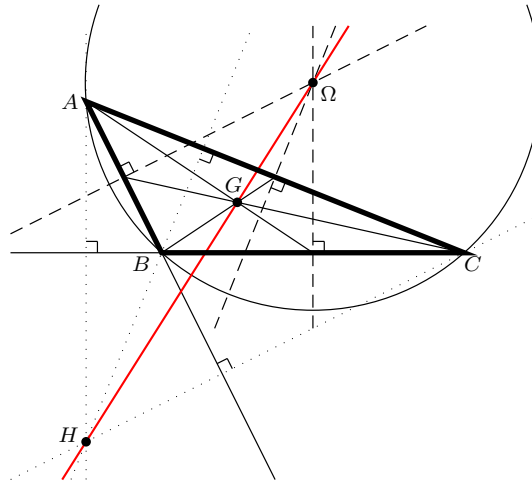
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BM} \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{CM} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \\ &= \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\end{aligned}$$

Soit  $H$  le point d'intersection des hauteurs du triangle issues de  $A$  et de  $B$  : on a  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  et  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ . Pour  $M = H$ , l'égalité qui précède implique donc que  $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ , *i.e.* que  $H$  appartient aussi à la hauteur issue de  $C$ . Cela implique donc que les trois hauteurs sont concourantes en  $H$ .  $\square$

**Remarque.** On peut montrer que  $H$  est le barycentre de  $(A, \tan(\theta_A))$ ,  $(B, \tan(\theta_B))$  et  $(C, \tan(\theta_C))$ .

**Proposition 4.1.8.** Le centre de gravité  $G$ , l'orthocentre  $H$  et le centre  $\Omega$  du cercle circonscrit sont alignés, et on a

$$\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$$

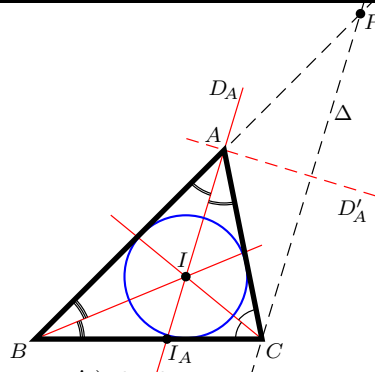


*Démonstration.* Quitte à effectuer une translation (qui est une isométrie : elle préserve l'orthogonalité, donc les hauteurs et les médianes), on peut supposer que l'origine de notre repère est  $\Omega$ . Cela implique que  $|a| = |b| = |c|$  ( $c$ 'est le rayon du cercle circonscrit). Soit  $M$  le point d'affixe

$$z = a + b + c$$

On a  $\langle z - a | b - c \rangle = \langle b + c | b - c \rangle = |b|^2 - |c|^2 = 0$ , ce qui implique que les droites  $(AM)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires, *i.e.* que  $M$  appartient à la hauteur du triangle issue de  $A$ . Par symétrie,  $M$  appartient aussi aux autres hauteurs : on a en fait  $M = H$ . Comme  $G$  est d'affixe  $\frac{a+b+c}{3}$ , on a bien  $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$ , en particulier, les points  $G$ ,  $\Omega$  et  $H$  sont alignés.  $\square$

**Proposition 4.1.9.** Les trois bissectrices intérieures du triangle  $ABC$  sont concourantes en le centre du cercle inscrit au triangle. Ce dernier est aussi le barycentre de  $(A, BC)$ ,  $(B, AC)$  et  $(C, AB)$ .



*Démonstration.* Soit  $D_A$  (resp.  $D'_A$ ) la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle  $\widehat{BAC}$ . La droite  $D_A$  coupe  $(BC)$  en un point  $I_A \in ]BC[$ . Soit  $\Delta$  la parallèle à  $D_A$  passant par  $C$  : elle coupe  $(AB)$  en  $P$ . En outre, elle est perpendiculaire à  $D'_A$  : le triangle  $PAC$  est isocèle en  $A$ , *i.e.*  $AP = AC$ . D'après le théorème de Thalès, on a  $\frac{I_A B}{I_A C} = \frac{AB}{AP} = -\frac{AB}{AC}$ . Cela implique que le point  $I_A$  est le barycentre de  $(B, AC)$  et  $(C, AB)$ .

Notons maintenant  $I$  le barycentre de  $(A, BC)$ ,  $(B, AC)$  et  $(C, AB)$ . Par associativité du barycentre, c'est aussi le barycentre de  $(A, BC)$  et  $(I_A, AC + AB)$ . Comme  $A$  et  $I_A$  appartiennent à  $D_A$ , on a aussi  $I \in D_A$ . Comme  $A, B$  et  $C$  jouent des rôles symétriques, on en déduit de même que  $I$  appartient aux autres bissectrices intérieures du triangle  $ABC$ . Cela implique que ces dernières ont concourantes en  $I$ .

Par définition de  $I$ , il est à égale distance  $d$  de  $(AB)$ ,  $(BC)$  et  $(AC)$  : le cercle de centre  $I$  et de rayon  $d$  est inscrit dans le triangle  $ABC$ .  $\square$

#### 4.1.10. Relations trigonométriques.

**Théorème 4.1.11.** On a  $\theta_A + \theta_B + \theta_C \equiv \pi \pmod{2\pi \mathbf{Z}}$ .

*Démonstration.* On a

$$\theta_A + \theta_B + \theta_C = \underbrace{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}_{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC})} + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pi \pmod{2\pi \mathbf{Z}}$$

$\square$

**Proposition 4.1.12.** On a  $\frac{\sin(\theta_A)}{BC} = \frac{\sin(\theta_B)}{AC} = \frac{\sin(\theta_C)}{AB}$ .

*Démonstration.* Remarquons que

$$\sin(\theta_A) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{AB \cdot AC} \quad \sin(\theta_B) = \frac{\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})}{BC \cdot BA} \quad \sin(\theta_C) = \frac{\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}{CA \cdot CB}$$

Le propriétés du déterminant impliquent que

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$$

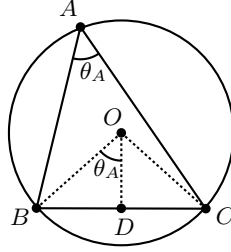
La proposition en découle en divisant par  $AB \cdot BC \cdot AC$ .  $\square$

**Proposition 4.1.13.** Si  $S$  désigne la surface du triangle  $ABC$  et  $r$  le rayon du cercle circonscrit au triangle, on a

$$\frac{2S}{AB \cdot BC \cdot AC} = \frac{|\sin(\theta_A)|}{BC} = \frac{|\sin(\theta_B)|}{AC} = \frac{|\sin(\theta_C)|}{AB} = \frac{1}{2r}$$

*Démonstration.* La première égalité résulte de la propriété qui précède et de l'égalité  $S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ . Pour prouver la dernière, on considère le projeté orthogonal  $D$  du centre  $O$  du cercle circonscrit sur le segment  $[BC]$ . D'après le théorème de l'angle au centre,

on a  $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = \pm\theta_A \pmod{2\pi\mathbf{Z}}$ , ce qui implique  $BD = OB |\sin(\theta_A)|$  (dans le triangle rectangle  $OBD$ ). Comme  $OB = r$  et  $BC = 2BD$ , on a  $\frac{BC}{2} = r |\sin(\theta_A)|$ , i.e.  $\frac{|\sin(\theta_A)|}{BC} = \frac{1}{2r}$ .



□

**Proposition 4.1.14.** On a

$$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\theta_A)$$

*Démonstration.* On a  $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{AC}\|^2$ . □

**Corollaire 4.1.15.** (Formule de Héron). Soit  $p = \frac{AB+BC+CA}{2}$  le demi-périmètre du triangle  $ABC$ . Alors

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)}$$

*Démonstration.* D'après ce qui précède, on a  $S = \frac{AB \cdot AC}{2} |\sin(\theta_A)| = \frac{AB \cdot AC}{2} \sqrt{1 - \cos^2(\theta_A)} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sqrt{(1 - \cos(\theta_A))(1 + \cos(\theta_A))}$ . Par ailleurs, on a  $\cos(\theta_A) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$ , donc

$$\begin{aligned} 1 - \cos(\theta_A) &= \frac{2AB \cdot AC - AB^2 - AC^2 + BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{BC^2 - (AB - AC)^2}{2AB \cdot AC} \\ &= \frac{(BC - AB + AC)(BC + AB - AC)}{2AB \cdot AC} = \frac{2(p-AB)(p-AC)}{AB \cdot AC} \\ 1 + \cos(\theta_A) &= \frac{2AB \cdot AC + AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{(AB + AC)^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ &= \frac{(AB + AC + BC)(AB + AC - BC)}{2AB \cdot AC} = \frac{2p(p-BC)}{AB \cdot AC} \end{aligned}$$

et on a bien  $S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)}$ . □

## 4.2. Les coniques.

4.2.1. *Définitions et classification.* Dans tout ce qui suit, on se place dans le plan  $\mathcal{P}$  réel euclidien. On se donne un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Définition 4.2.2.** Une *conique* du plan  $\mathcal{P}$  est une courbe de degré 2, i.e. le lieu des zéros d'une fonction polynomiale de degré 2.

**Remarque.** Cette notion ne dépend pas de la base choisie, vu que le degré d'une fonction polynomiale est invariant par changement de base affine.

Dans le repère  $\mathcal{R}$ , une fonction polynomiale de degré 2 s'écrit

$$f(x, y) = \underbrace{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}_{q(x,y)} + \underbrace{Dx + Ey + F}_{\varphi(x,y)}$$

(avec  $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$  bien sûr) :  $q$  est une forme quadratique, et  $\varphi$  une forme affine.

On les représente matriciellement de la façon suivante. La matrice de  $q$  est  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$  et celle de la forme linéaire  $(x, y) \mapsto Dx + Ey$  est  $L = (D \ E)$ . Si  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , on a

$$f(x, y) = {}^tXMX + LX + F$$

Dans ce qui suit, on va classer les coniques à déplacement près. Pour ce faire, on va faire un changement de repère (rotation puis translation) pour que l'équation de la conique dans le nouveau repère soit aussi simple que possible.

Commençons par effectuer une rotation d'angle  $\theta$  : cela revient à faire le changement de coordonnées

$$\begin{cases} x = x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) \\ y = x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta) \end{cases}$$

(matriciellement,  $X = R_\theta X'$ ). On veut qu'il n'y ait pas de terme en  $x'y'$  dans

$$q(x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta), x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta))$$

Le coefficient de  $x'y'$  dans ce dernier vaut

$$-2A \cos(\theta) \sin(\theta) + 2B(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2C \sin(\theta) \cos(\theta) = (C - A) \sin(2\theta) + 2B \cos(2\theta)$$

c'est toujours possible (et si  $|C - A| + |B| \neq 0$ , l'angle  $\theta$  est déterminé modulo  $\frac{\pi}{2}$ ).

Observons que la matrice de  $q$  dans la nouvelle base est  ${}^tR_\theta M R_\theta$ .

Ce changement de coordonnées effectué, on s'est ramené à une équation de la forme

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + 2ux + 2vy + F$$

Remarquons que  $\alpha\beta = AC - B^2$  (c'est le *discriminant* de  $q$ ).

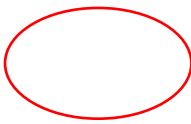
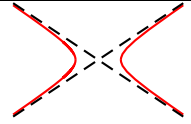
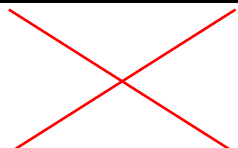
Premier cas :  $\alpha\beta \neq 0$  (on dit que  $q$  est *non dégénérée*). On écrit alors

$$f(x, y) = \alpha \left(x + \frac{u}{\alpha}\right)^2 + \beta \left(y + \frac{v}{\beta}\right)^2 + F - \frac{u^2}{\alpha} - \frac{v^2}{\beta}$$

Quitte à translater le repère, on s'est ramené à une équation de la forme

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + F'$$

Si  $F' \neq 0$ , on peut diviser l'équation par  $F'$  et supposer  $F' = 1$ . Suivant les signes de  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut alors les écrire  $\pm \frac{1}{a^2}$  et  $\pm \frac{1}{b^2}$  respectivement. Les différents cas possibles sont résumés dans le tableau suivant.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	ellipse réelle (cercle lorsque $a = b$ )	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	ellipse imaginaire	$\emptyset$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	hyperbole	
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	deux droites imaginaires	$\{O\}$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	deux droites réelles concourantes	

**Remarque.** Dans tous les cas, l'équation des directions asymptotiques de la conique est  $q(x, y) = 0$ .

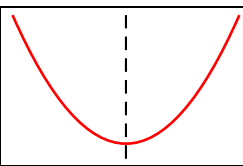
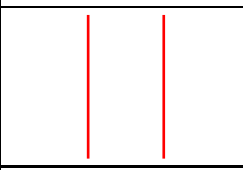

Deuxième cas :  $\alpha\beta = 0$  (la forme quadratique  $q$  est *dégénérée*, mais non nulle par hypothèse). Quitte à refaire une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  si nécessaire, on peut supposer  $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 0$ . On écrit alors

$$f(x, y) = \alpha\left(x + \frac{u}{\alpha}\right)^2 + 2vy + F - \frac{u^2}{\alpha}$$

Quitte à translater le repère, et à diviser l'équation par  $\alpha$ , on s'est ramenés à une équation de la forme

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 - 2py & \text{si } v \neq 0 \\ x^2 + F' & \text{si } v = 0 \end{cases}$$

Dans le deuxième cas, suivant le signe de  $F'$ , on peut l'écrire  $\pm a^2$ . Les différents cas possibles sont résumés dans le tableau suivant.

$x^2 = 2py$	parabole	
$x^2 + a^2 = 0$	deux droites imaginaires	$\emptyset$
$x^2 - a^2 = 0$	deux droites strictement parallèles	
$x^2 = 0$	deux droites confondues	

4.2.3. *Propriétés et tracé. L'ellipse.* Soient  $0 < b < a$  et  $\Gamma$  l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Elle admet la paramétrisation  $\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases}$  avec  $t \in [0, 2\pi[$ .

Posons  $c = \sqrt{a^2 - b^2} \in \mathbf{R}_{>0}$ . Les points  $F$  et  $F'$  de coordonnées respectives  $(c, 0)$  et  $(-c, 0)$  s'appellent les *foyers* de  $\Gamma$ .

**Proposition 4.2.4.** (*Définition bifocale : l'ovale du jardinier*). On a  $M \in \Gamma \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$ .

*Démonstration.* Comme  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , on a  $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}$ , donc

$$MF^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2xc + \underbrace{c^2 + b^2}_{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^2} = a^2 - 2xc + \frac{c^2x^2}{a^2} = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$$

Comme  $a - \frac{cx}{a} \geq 0$  (parce que  $|x| \leq a$  et  $c \leq a$ ), on a

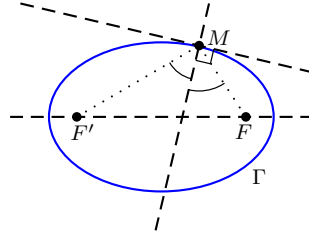
$$(*) \quad MF = a - \frac{cx}{a}$$

De même, on a  $MF' = a + \frac{cx}{a}$ , ce qui implique  $MF + MF' = 2a$ .

Réciproquement, si  $MF + MF' = 2a$ , on a  $MF'^2 = 4a^2 - 4aMF + MF^2$ , i.e.  $y^2 + (x+c)^2 = MF'^2 = 4a^2 - 4aMF + y^2 + (x-c)^2$ , soit  $4cx = 4a^2 - 4aMF$  et donc  $MF = a - \frac{cx}{a}$ . On en déduit que  $y^2 + (x-c)^2 = MF^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$ , i.e.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , d'où l'équivalence.  $\square$

**Corollaire 4.2.5.** La normale à  $\Gamma$  en  $M$  est la bissectrice intérieure de  $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$ .

*Démonstration.* Un vecteur directeur de cette normale est le gradient de la fonction  $g: M \mapsto 2a - \|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\|$ . Or ce dernier est  $\frac{\overrightarrow{MF}}{\|\overrightarrow{MF}\|} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{MF'}\|}$ , ce qu'on voulait.  $\square$

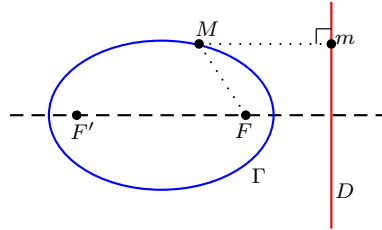


On note  $D$  (resp.  $D'$ ) la droite d'équation  $x = \frac{a^2}{c}$  (resp.  $x = -\frac{a^2}{c}$ ). La droite  $D$  (resp.  $D'$ ) s'appelle la *directrice* de  $\Gamma$  associée à  $F$  (resp. à  $F'$ ). L'*excentricité* de  $\Gamma$  est le réel  $e = \frac{c}{a} \in ]0, 1[$ .

Pour un point  $M$  du plan, on note  $m$  son projeté orthogonal sur  $D$ .

**Proposition 4.2.6.** L'ellipse  $\Gamma$  est le lieu des points  $M$  tels que  $\frac{MF}{Mm} = e$ .

*Démonstration.* Soit  $M \in \Gamma$  de coordonnées  $(x, y)$ . D'après (\*) (cf preuve de la proposition précédente), on a  $MF = a - \frac{cx}{a}$ . Comme  $Mm = \frac{a^2}{c} - x$  (on a  $x \leq a \leq \frac{a^2}{c}$ ), on a  $Mm = \frac{a}{c}(a - \frac{cx}{a}) = \frac{1}{e}MF$ . Réciproquement, si  $\frac{MF}{Mm} = e$ , on a  $MF = eMm = a - \frac{cx}{a}$ , et on conclut que  $M \in \Gamma$  comme à la fin de la démonstration de la proposition précédente.  $\square$



**L'hyperbole.** Soit  $\Gamma$  l'hyperbole d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Elle admet la paramétrisation  $\begin{cases} x = \varepsilon a \cosh(t) \\ y = b \sinh(t) \end{cases}$  avec  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  et  $t \in \mathbf{R}$ .

Posons  $c = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbf{R}_{>0}$ . Les points  $F$  et  $F'$  de coordonnées respectives  $(c, 0)$  et  $(-c, 0)$  s'appellent les *foyers* de  $\Gamma$ .

**Proposition 4.2.7.** (*Définition bifocale*). On a  $M \in \Gamma \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a$ .

*Démonstration.* Comme  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , on a  $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$ , donc

$$MF^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2xc + \underbrace{c^2 - b^2}_{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2} = a^2 - 2xc + \frac{c^2x^2}{a^2} = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$$

On a  $c > a$ . Si  $x > 0$ , on a  $x \geq a$ , donc  $\frac{cx}{a} > a$ , de sorte que  $MF = \frac{cx}{a} - a$ . Si  $x < 0$ , on a  $a - \frac{cx}{a} > 0$  donc  $MF = a - \frac{cx}{a}$  : en résumé on a  $MF = \text{sign}(x)\left(\frac{cx}{a} - a\right)$ . De même, on a  $MF' = \left|a + \frac{cx}{a}\right| = \text{sign}(x)\left(a + \frac{cx}{a}\right)$ , ce qui implique  $MF - MF' = -\text{sign}(x)2a$ , et donc  $|MF - MF'| = 2a$ .

Réciproquement, si  $|MF - MF'| = 2a$  i.e.  $MF' = 2\varepsilon a + MF$  avec  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ , donc  $MF'^2 = 4a^2 - 4\varepsilon aMF + MF^2$ , i.e.  $y^2 + (x + c)^2 = MF^2 = 4a^2 - 4\varepsilon aMF + y^2 + (x - c)^2$ , soit  $4cx = 4a^2 - 4\varepsilon aMF$  et donc  $MF = \varepsilon\left(a - \frac{cx}{a}\right)$ . On en déduit que  $y^2 + (x - c)^2 = MF^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$ , i.e.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , d'où l'équivalence.  $\square$

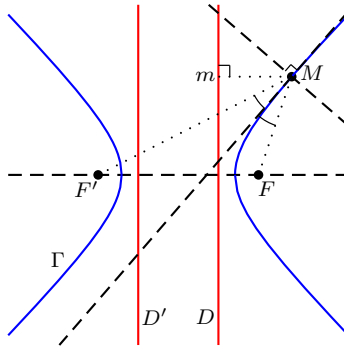
**Corollaire 4.2.8.** La tangente à  $\Gamma$  en  $M$  est la bissectrice intérieure de  $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$ .

*Démonstration.* Un vecteur directeur de la normale est le gradient de la fonction  $g: M \mapsto 2a - \text{sign}(x)(\|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\|)$ . Au signe près, ce dernier est  $\frac{\overrightarrow{MF}}{\|\overrightarrow{MF}\|} - \frac{\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{MF'}\|}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Comme dans le cas de l'ellipse, on définit la *directrice* de  $\Gamma$  associée à  $F$  (resp. à  $F'$ ) comme la droite  $D$  d'équation  $x = \frac{a^2}{c}$  (resp.  $D'$  d'équation  $x = -\frac{a^2}{c}$ ). L'*excentricité* de  $\Gamma$  est le réel  $e = \frac{c}{a} \in ]1, +\infty[$ . Pour un point  $M$  du plan, on note  $m$  son projeté orthogonal sur  $D$ .

**Proposition 4.2.9.** L'hyperbole  $\Gamma$  est le lieu des points  $M$  tels que  $\frac{MF}{Mm} = e$ .

*Démonstration.* Soit  $M \in \Gamma$  de coordonnées  $(x, y)$ . On a vu que  $MF = \text{sign}(x)(\frac{cx}{a} - a)$ . Comme  $Mm = \text{sign}(x)(x - \frac{a^2}{c})$ , on a  $Mm = \text{sign}(x)\frac{a}{c}(a - \frac{cx}{a}) = \frac{1}{e}MF$ . Réciproquement, si  $\frac{MF}{Mm} = e$ , on a  $MF = eMm = \text{sign}(x)(\frac{cx}{a} - a)$ , et on conclut que  $M \in \Gamma$  comme à la fin de la démonstration de la proposition précédente.  $\square$



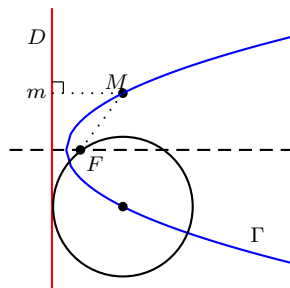
**La parabole.** Soit  $\Gamma$  l'hyperbole d'équation  $y^2 = 2px$ . Elle admet la paramétrisation suivante :  $\begin{cases} x = \frac{p}{2}t^2 \\ y = pt \end{cases}$  pour  $t \in \mathbf{R}$ .

Soit  $F$  le point de coordonnées  $(\frac{p}{2}, 0)$  et  $D$  la droite d'équation  $x = -\frac{p}{2}$  (le *foyer* et la *directrice* de  $\Gamma$ ). Si  $M$  est un point du plan, on note  $m$  son projeté orthogonal sur  $D$ .

**Proposition 4.2.10.** La parabole  $\Gamma$  est le lieu des points  $M$  tels que  $\frac{MF}{Mm} = 1$ .

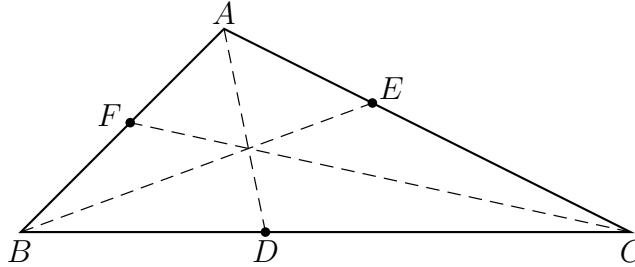
*Démonstration.* Si  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  : on a  $M \in \Gamma \Leftrightarrow y^2 = 2px \Leftrightarrow (x + \frac{p}{2})^2 = y^2 + (x - \frac{p}{2})^2 \Leftrightarrow Mm = MF$ .  $\square$

**Remarque.** La proposition qui précède peut se reformuler en disant que  $\Gamma$  est le lieu des centres des cercles passant par  $F$  et tangents à  $D$ .



4.2.11. *Un exemple.* Commençons par un résultat très classique, qui va nous servir par la suite.

**Théorème 4.2.12.** (*Ceva*) Soient  $ABC$  un triangle,  $D \in (BC)$ ,  $E \in (CA)$ ,  $F \in (AB)$  trois points distincts des sommets. Les droites  $(AD)$ ,  $(BE)$  et  $(CF)$  sont parallèles ou concourantes si et seulement si  $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$ .



*Démonstration.* On commence par observer que si  $M$  est le barycentre de  $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$  avec  $\alpha\beta \neq 0$  (i.e.  $M$  distinct de  $A$  et  $B$ ), on a  $\alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} = \vec{0}$ , donc  $\alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} = 0$ , i.e.  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$ . Si  $I$  est le barycentre de  $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$  avec  $\alpha\beta\gamma \neq 0$  (i.e.  $I$  distinct de  $A$ ,  $B$  et  $C$ ), et  $M$  désigne le point d'intersection de  $(AB)$  et  $(GC)$ , alors  $M = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta))$  de sorte que  $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$  d'après ce qu'on vient de voir.

Supposons les droites  $(AD)$ ,  $(BE)$  et  $(CF)$  parallèles. D'après le théorème de Thalès, on a  $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$  et  $\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BA}}$ , de sorte que

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} \frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$$

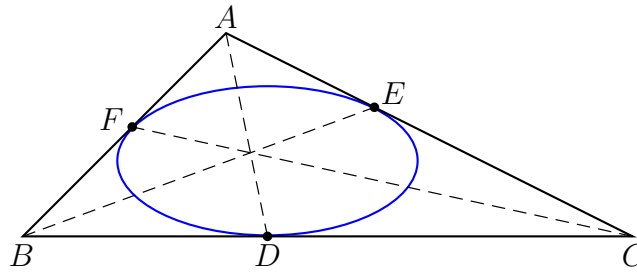
Supposons les droites  $(AD)$ ,  $(BE)$  et  $(CF)$  concourantes en un point distinct des sommets : notons  $I$  leur point d'intersection. On peut écrire  $I = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$  avec  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ . D'après ce qu'on a vu plus haut, on a  $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$ , et de même  $\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = -\frac{\alpha}{\gamma}$  et  $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\gamma}{\beta}$ , ce qui implique

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \left(-\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right) \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = -1$$

Réciproquement, supposons que  $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$  et  $(AD)$ ,  $(BE)$ ,  $(CF)$  non parallèles : on peut supposer  $(AD)$  et  $(BE)$  sécantes, soit  $I$  leur point d'intersection. On peut écrire  $I = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$  avec  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ , et d'après ce qui précède, on a  $D = \text{Bar}((B, \beta), (C, \gamma))$  et  $E = \text{Bar}((A, \alpha), (C, \gamma))$ , de sorte que  $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\gamma}{\beta}$  et  $\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = -\frac{\alpha}{\gamma}$ . On a donc  $\left(-\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right) \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$ , d'où  $\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -\frac{\beta}{\alpha}$ , i.e.  $F = \text{Bar}((A, \alpha), (B, \beta))$ . On a donc  $I = \text{Bar}((F, \alpha + \beta), (C, \gamma))$ , d'où  $I \in (CF)$ , et les droites  $(AD)$ ,  $(BE)$  et  $(CF)$  sont concourantes en  $I$ .  $\square$

**Proposition 4.2.13.** Une ellipse est inscrite dans un triangle  $ABC$ . On note  $D$ ,  $E$  et  $F$  les points de contact sur  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$  respectivement. Alors  $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$ , et les droites  $(AD)$ ,  $(BE)$  et  $(CF)$  sont concourantes.





*Démonstration.* Les hypothèses et la conclusions sont stables par transformation affine : quitte à en appliquer une qui transforme l'ellipse en un cercle, on peut supposer que l'ellipse est un cercle. On a alors  $AE = AF$ ,  $BD = BF$  et  $CD = CE$ , ce qui implique  $\frac{DB}{DC} \frac{EC}{EA} \frac{FA}{FB} = 1$ , de sorte que  $\frac{DB}{DC} \frac{EC}{EA} \frac{FA}{FB} \in \{\pm 1\}$ . On conclut en observant que  $\frac{DB}{DC}, \frac{EC}{EA}, \frac{FA}{FB} < 1$ . Le fait que  $(AD)$ ,  $(BE)$  et  $(CF)$  sont concourantes résulte alors de la réciproque du théorème de Ceva.  $\square$

### 4.3. Polygones réguliers et sous-groupes finis d'isométries du plan.

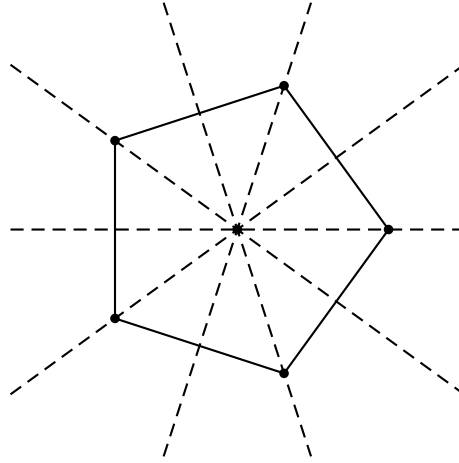
4.3.1. *Sous-groupes finis d'isométries du plan.* On note  $\mathcal{P}$  le plan affine euclidien. Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\text{GA}(\mathcal{P})$ . Si  $M \in \mathcal{P}$  est un point quelconque, on dispose de son orbite  $X = \{g(M)\}_{g \in G}$ . Comme  $G$  est fini, c'est un ensemble fini : on note  $\Omega$  son isobarycentre. Un élément  $g \in G$  induit une permutation sur  $X$  (i.e. une bijection de  $X$  dans lui-même). Comme  $g$  est affine,  $g(\Omega)$  est l'isobarycentre de  $g(X) = X$  : on a  $g(\Omega) = \Omega$ . Le point  $\Omega$  est fixe pour tous les éléments de  $G$ . En vectorialisant  $\mathcal{P}$  via le choix de  $\Omega$ , le groupe  $G$  s'identifie à un sous-groupe de  $\text{GL}(P)$ , où  $P$  est le plan vectoriel sous-jacent à  $\mathcal{P}$ . Pour classifier les sous-groupes finis d'isométries du plan, il suffit donc de classifier les sous-groupes finis de  $\text{O}_2(\mathbf{R})$  : on suppose désormais que  $G$  est un sous-groupe fini de  $\text{O}_2(\mathbf{R})$ .

On dispose du morphisme surjectif  $\det: \text{O}_2(\mathbf{R}) \rightarrow \{\pm 1\}$ , dont le noyau est  $\text{SO}_2(\mathbf{R})$ . Posons  $H = G \cap \text{SO}_2(\mathbf{R})$ , c'est le noyau de la restriction du déterminant  $\det: G \rightarrow \{\pm 1\}$ .

Premier cas  $G = H$ , i.e.  $G \subset \text{SO}_2(\mathbf{R})$ . Le morphisme  $\rho: \mathbf{R} \rightarrow \text{SO}_2(\mathbf{R}); \theta \mapsto R_\theta$  est surjectif, de noyau  $2\pi\mathbf{Z}$ . Le sous-groupe  $\rho^{-1}(G)$  de  $\mathbf{R}$  contient  $2\pi\mathbf{Z}$  comme sous-groupe d'indice  $n = \#G$  : on a nécessairement  $\rho^{-1}(G) = \frac{2\pi}{n}\mathbf{Z}$ , ce qui implique que  $G = \rho\left(\frac{2\pi}{n}\mathbf{Z}\right)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , engendré par  $R_{\frac{2\pi}{n}}$ .

Deuxième cas  $G \neq H$ , i.e.  $\det: G \rightarrow \{\pm 1\}$  est surjectif : soit  $s \in G \setminus H$ . On a  $\det(s) = -1$ , et  $s$  est une symétrie. Comme  $H$  est un sous-groupe fini de  $\text{SO}_2(\mathbf{R})$ , on sait qu'il est cyclique, engendré par  $r = R_{\frac{2\pi}{n}}$  où  $n = \#H$ . Le sous-groupe de  $G$  engendré par  $r$  et  $s$  contient  $H$  strictement : c'est  $G$  en entier. Par ailleurs, on a  $\det(rs) = \det(r)\det(s) = -1$ , de sorte que  $rs$  est une symétrie : on a  $(rs)^2 = \text{I}_2$ , donc  $srs = r^{-1}$ . En particulier, le groupe  $G$  n'est pas commutatif si  $n > 2$ . Un tel groupe s'appelle *diédral* d'ordre  $2n$ . Il contient  $n$  rotations :  $\text{I}_2, r, r^2, \dots, r^{n-1} = r^{-1}$  et  $n$  réflexions  $s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s$ .

#### 4.3.2. Réalisation géométrique : polygones réguliers.



Soit  $n \in \mathbf{N}_{>0}$ . On fixe une origine  $\Omega \in \mathcal{P}$  et  $A_0 \in \mathcal{P} \setminus \{\Omega\}$ . Notons  $r$  la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  et  $s$  la réflexion d'axe  $(\Omega A)$ . Le sous-groupe de  $\mathbf{GA}(\mathcal{P})$  engendré par  $r$  et  $s$  est diédral d'ordre  $2n$ . Pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , on pose  $A_k = r^k(A_0)$ . L'ensemble  $\{A_k\}_{0 \leq k < n}$  est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à  $n$  côtés (comme  $r^k$  est une isométrie, on a  $A_0 A_1 = A_k A_{k+1}$  pour tout  $k \in \{0, \dots, n-2\}$ ). Les réflexions de  $G$  sont alors les réflexions d'axe les bissectrices des segments  $[A_k, A_{k+1}]$  (pour  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , en posant  $A_n = A_0$ ).

## 5. COMPLÉMENTS

**5.1. Le théorème fondamental de la géométrie affine.** Dans tout ce qui suit,  $\mathcal{E}$  désigne un espace affine réel de direction  $E$  de dimension finie  $n$ , et  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une application.

**Théorème 5.1.1.** Supposons  $n \geq 2$ . Si  $f$  est bijective et conserve les alignements (*i.e.* les images de trois points alignés sont trois points alignés), alors  $f$  est affine.

**Notation.** Si  $X \subset \mathcal{E}$  est une partie non vide, on note  $\mathbf{V}(X)$  les sous-espace affine engendré par  $X$  dans  $\mathcal{E}$ . C'est l'ensemble des barycentres de points pris dans  $X$ .

**Lemme 5.1.2.** Soient  $m \leq n$  et  $A = \{a_0, \dots, a_m\}$  une famille de  $m+1$  points affinement indépendants de  $\mathcal{E}$ . Alors  $f(\mathbf{V}(A)) \subset \mathbf{V}(f(A))$ .

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $m$ , le cas  $m = 0$  étant évident, et le cas  $m = 1$  étant précisément l'hypothèse de conservation de l'alignement. Soit donc  $m \in \{1, \dots, n-1\}$  et supposons le lemme vrai pour les systèmes d'au plus  $m$  points. Soient  $A = \{a_0, \dots, a_m\}$  une famille de  $m+1$  points affinement indépendants, et  $a \in \mathbf{V}(A)$  : il existe  $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$  tels que  $\lambda_0 + \dots + \lambda_m = 1$  et  $a = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_m a_m$  (ce sont les coordonnées barycentriques de  $a$  dans la base affine  $A$  de  $\mathbf{V}(A)$ ). Comme  $m \geq 1$ , les  $\lambda_i$  ne sont pas tous égaux à 1. Quitte à renuméroter, on peut supposer que  $\lambda_m \neq 1$  : on a  $a = (1 - \lambda_m)a' + \lambda_m a_m$  avec  $a' = \frac{1}{1 - \lambda_m}(\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_{m-1} a_{m-1}) \in \mathbf{V}(A')$  où  $A' = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ . Les trois points  $a, a'$  et  $a_m$  sont alignés : il en est de même de  $f(a), f(a')$  et  $f(a_m)$ , donc  $f(a) \in \mathbf{V}(\{f(a'), f(a_m)\})$ . Mais par hypothèse de récurrence, on a  $f(\mathbf{V}(A')) \subset \mathbf{V}(f(A'))$  : comme  $a' \in \mathbf{V}(A')$ , on a  $f(a') \in \mathbf{V}(f(A'))$ , de sorte que  $f(a) \in \mathbf{V}(f(A') \cup \{f(a_m)\}) = \mathbf{V}(f(A))$ . Comme c'est vrai pour tout  $a \in \mathbf{V}(A)$ , on a bien  $f(\mathbf{V}(A)) \subset \mathbf{V}(f(A))$ .  $\square$

**Lemme 5.1.3.** Si  $\{a_0, \dots, a_m\}$  est une famille de  $m+1$  points affinement indépendants de  $\mathcal{E}$ , les points  $\{f(a_0), \dots, f(a_m)\}$  sont affinement indépendants.

*Démonstration.* On complète  $A = \{a_0, \dots, a_m\}$  en une base affine  $B = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  de  $\mathcal{E}$ . Raisonnons par l'absurde : si la famille  $\{f(a_0), \dots, f(a_m)\}$  était affinement liée, on aurait  $\dim(\mathbf{V}(f(A))) < m$ , et donc

$$\dim(f(\mathcal{E})) = \dim(f(\mathbf{V}(B))) \leq \dim(\mathbf{V}(f(B))) \leq \dim(\mathbf{V}(f(A))) + n - m < n = \dim \mathcal{E}$$

(la première inégalité résulte du lemme précédent). Cela impliquerait  $f(\mathcal{E}) \neq \mathcal{E}$ , contredisant la surjectivité de  $f$ .  $\square$

**Lemme 5.1.4.** Soient  $a, b \in \mathcal{E}$  distincts et  $D = (ab) := \mathbf{V}(\{a, b\})$  la droite passant par  $a$  et  $b$ . Alors  $f(D)$  est la droite  $(f(a)f(b))$ .

*Démonstration.* Bien entendu,  $f(D)$  est inclus dans la droite  $\Delta = (f(a)f(b))$  (car  $f$  conserve l'alignement de trois points). Réciproquement, si  $m$  appartient à  $\Delta$ , il existe  $c \in \mathcal{E}$  tel que  $f(c) = m$  (car  $f$  est surjective). Si les points  $a, b$  et  $c$  n'étaient pas alignés, ils seraient affinement indépendants : il en serait de même de  $f(a), f(b)$  et  $m = f(c)$  en vertu du lemme 5.1.3, ce qui n'est pas (puisqu'ils sont alignés). Les points  $a, b$  et  $c$  sont donc alignés : on a  $c \in D$ , et  $m = f(c) \in f(D)$ . Cela prouve  $f(D) = \Delta$ .  $\square$

**Remarque.** Il n'était pas évident *a priori* que l'image par  $f$  de la droite  $D = (ab)$  soit la droite  $(f(a)f(b))$  toute entière.

**Lemme 5.1.5.** L'image par  $f$  de deux droites parallèles est deux droites parallèles. En particulier, l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.

*Démonstration.* D'après le lemme précédent, l'image de deux droites par  $f$  est la réunion de deux droites. Reste à voir que  $f$  conserve le parallélisme. C'est trivial si les deux droites sont confondues : supposons données deux droites  $D = (ab)$  et  $D' = (a'b')$  parallèles et distinctes. D'après le lemme 5.1.2, on a

$$f(\mathbf{V}(a, b, a')) \subset \mathbf{V}(f(a), f(b), f(a'))$$

Les points  $a, b$  et  $a'$  sont affinement indépendants : il en est de même de  $f(a), f(b)$  et  $f(a')$  (cf lemme 5.1.3), de sorte que  $\mathbf{V}(f(a), f(b), f(a'))$  est un plan, qui contient  $f(D)$  et  $f(D')$ . Les droites  $f(D)$  et  $f(D')$  sont donc soit parallèles, soit sécantes. Ce dernier cas est exclu parce que  $D \cap D' = \emptyset$  et  $f$  est injective.  $\square$

Fixons un point  $\omega \in \mathcal{E}$  (qui va servir d'origine). Si  $\vec{x} \in E$ , on pose  $\varphi(\vec{x}) = \overrightarrow{f(\omega)f(\omega + \vec{x})}$ , de sorte qu'on a

$$f(m) = f(\omega) + \varphi(\overrightarrow{\omega m})$$

pour tout  $m \in \mathcal{E}$ . Il s'agit de prouver que  $\varphi$  est *linéaire*. Il est déjà évident que  $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ .

**Lemme 5.1.6.** Si  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ , on a  $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$ .

*Démonstration.* Comme  $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ , c'est trivial si l'un parmi  $\vec{x}$  ou  $\vec{y}$  est nul : on suppose  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  non nuls.

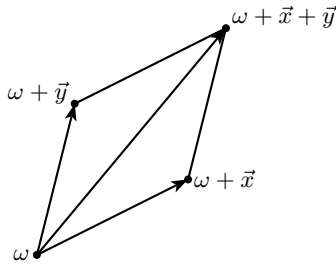
Premier cas : la famille  $\{\vec{x}, \vec{y}\}$  est libre. Le quadruplet  $(\omega, \omega + \vec{x}, \omega + \vec{x} + \vec{y}, \omega + \vec{y})$  (dans cet ordre) forme les sommets d'un parallélogramme : il en est de même de  $(f(\omega), f(\omega + \vec{x}), f(\omega + \vec{x} + \vec{y}), f(\omega + \vec{y}))$ , i.e. de  $(f(\omega), f(\omega) + \varphi(\vec{x}), f(\omega) + \varphi(\vec{x} + \vec{y}), f(\omega) + \varphi(\vec{y}))$ . Cela signifie exactement que  $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$ .

Deuxième cas :  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$ . Comme  $n \geq 2$ , on peut choisir  $\vec{z} \in E$  linéairement indépendant de  $\vec{x}$ . Le quadruplet  $(\omega + \vec{x}, \omega + \vec{z}, \omega - \vec{x}, \omega - \vec{z})$  (dans cet ordre) forme les sommets d'un parallélogramme de centre  $\omega$  : le quadruplet  $(f(\omega + \vec{x}), f(\omega + \vec{z}), f(\omega - \vec{x}), f(\omega - \vec{z}))$ , i.e.  $(f(\omega) + \varphi(\vec{x}), f(\omega) + \varphi(\vec{z}), f(\omega) + \varphi(-\vec{x}), f(\omega) + \varphi(-\vec{z}))$  est l'ensemble des sommets d'un

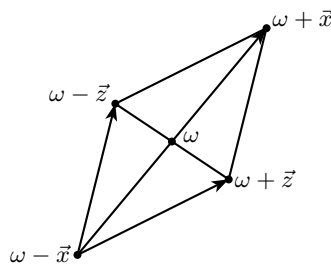
parallélogramme de centre l'intersection des droites  $f(\omega + \mathbf{R}\vec{x})$  et  $f(\omega + \mathbf{R}\vec{z})$ , *i.e.* de centre  $f(\omega)$ . Cela implique que  $\varphi(-\vec{x}) = -\varphi(\vec{x})$ .

Troisième cas : la famille  $\{\vec{x}, \vec{y}\}$  est liée et  $\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$ . Là encore, on choisit  $\vec{z} \in E$  linéairement indépendant de  $\vec{x}$  (et donc de  $\vec{y}$ ). D'après le premier cas, on a  $\varphi(\vec{x} + \vec{z}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{z})$  et  $\varphi(\vec{y} - \vec{z}) = \varphi(\vec{y}) + \varphi(-\vec{z})$ . D'après le deuxième cas, on a  $\varphi(-\vec{z}) = -\varphi(\vec{z})$ , et donc  $\varphi(\vec{y} - \vec{z}) = \varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{z})$ . On écrit maintenant  $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x} + \vec{z}) + (\vec{y} - \vec{z})$ . Si  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  sont tels que  $\lambda(\vec{x} + \vec{z}) + \mu(\vec{y} - \vec{z}) = \vec{0}$ , on a  $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} + (\lambda - \mu)\vec{z} = \vec{0}$ , et donc  $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$  et  $\lambda = \mu$ , *i.e.*  $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}$ . Comme  $\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$ , cela implique  $\lambda = \mu = 0$ , de sorte que la famille  $(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y} - \vec{z})$  est libre. D'après le premier cas, on a donc

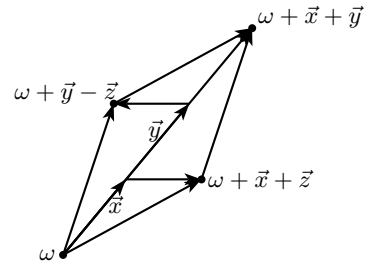
$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x} + \vec{y}) &= \varphi((\vec{x} + \vec{z}) + (\vec{y} - \vec{z})) \\ &= \varphi(\vec{x} + \vec{z}) + \varphi(\vec{y} - \vec{z}) \\ &= (\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{z})) + (\varphi(\vec{y}) - \varphi(\vec{z})) \\ &= \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}) \end{aligned}$$



Premier cas



Deuxième cas



Troisième cas

□

Si  $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ , l'application  $f$  envoie bijectivement la droite  $\omega + \mathbf{R}\vec{x}$  sur la droite  $f(\omega + \mathbf{R}\vec{x}) = f(\omega) + \mathbf{R}\varphi(\vec{x})$ . Il existe donc une application bijective  $\sigma_{\vec{x}}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que

$$(\forall \lambda \in \mathbf{R}) f(\omega) + \varphi(\lambda\vec{x}) = f(\omega + \lambda\vec{x}) = f(\omega) + \sigma_{\vec{x}}(\lambda)\varphi(\vec{x})$$

soit encore

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \sigma_{\vec{x}}(\lambda)\varphi(\vec{x})$$

pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

**Lemme 5.1.7.** L'application  $\sigma_{\vec{x}}$  ne dépend pas de  $\vec{x}$ .

*Démonstration.* Soient  $\vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{0\}$ . Montrons que  $\sigma_{\vec{x}} = \sigma_{\vec{y}}$ .

Premier cas : la famille  $\{\vec{x}, \vec{y}\}$  est libre. Les trois points  $\omega, \omega + \vec{x}$  et  $\omega + \vec{y}$  sont affinement indépendants : il en est de même des points  $f(\omega), f(\omega + \vec{x}) = f(\omega) + \varphi(\vec{x})$  et  $f(\omega + \vec{y}) = f(\omega) + \varphi(\vec{y})$ , de sorte que la famille  $(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}))$  est libre. Si  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(\vec{x} + \vec{y})) &= \sigma_{\vec{x} + \vec{y}}(\lambda)\varphi(\vec{x} + \vec{y}) \\ \varphi(\lambda\vec{x}) + \varphi(\lambda\vec{y}) &= \sigma_{\vec{x} + \vec{y}}(\lambda)(\varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})) \\ \sigma_{\vec{x}}(\lambda)\varphi(\vec{x}) + \sigma_{\vec{y}}(\lambda)\varphi(\vec{y}) &= \sigma_{\vec{x} + \vec{y}}(\lambda)\varphi(\vec{x}) + \sigma_{\vec{x} + \vec{y}}(\lambda)\varphi(\vec{y}) \end{aligned}$$

Comme la famille  $(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}))$  est libre, on a nécessairement

$$\sigma_{\vec{x}}(\lambda) = \sigma_{\vec{x} + \vec{y}}(\lambda) = \sigma_{\vec{y}}(\lambda)$$

On a donc  $\sigma_{\vec{x}} = \sigma_{\vec{y}}$  dans ce cas.

Deuxième cas : la famille  $\{\vec{x}, \vec{y}\}$  est liée. Comme plus haut, on peut choisir  $\vec{z} \in E$  linéairement indépendant de  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ . D'après le premier cas, on a  $\sigma_{\vec{x}} = \sigma_{\vec{z}} = \sigma_{\vec{y}}$ . □

Comme  $\sigma_{\vec{x}}$  ne dépend pas de  $\vec{x} \in E \setminus \{0\}$ , on le note  $\sigma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . On a

$$\varphi(\lambda\vec{x}) = \sigma(\lambda)\varphi(\vec{x})$$

pour tout  $\vec{x} \in E \setminus \{0\}$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Comme  $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ , on a  $\sigma(0) = 0$ , de sorte que l'égalité qui précède est en fait valable pour tout  $\vec{x} \in E$ .

**Définition 5.1.8.** Un *automorphisme* de  $\mathbf{R}$  est une application bijective  $\tau: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  telle que pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , on ait

$$\tau(\lambda - \mu) = \tau(\lambda) - \tau(\mu)$$

$$\tau(\lambda\mu) = \tau(\lambda)\tau(\mu)$$

$$\tau(1) = 1$$

**Lemme 5.1.9.** L'application  $\sigma$  est un automorphisme de  $\mathbf{R}$ .

*Démonstration.* Soient  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$  et  $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ . D'après le lemme 5.1.6, on a

$$\sigma(\lambda - \mu)\varphi(\vec{x}) = \varphi((\lambda - \mu)\vec{x}) = \varphi(\lambda\vec{x}) - \varphi(\mu\vec{x}) = \sigma(\lambda)\varphi(\vec{x}) - \sigma(\mu)\varphi(\vec{x})$$

de sorte que  $\sigma(\lambda - \mu) = \sigma(\lambda) - \sigma(\mu)$  (parce que  $\varphi(\vec{x}) \neq \vec{0}$ , vu que  $f$  est injective).

On a en outre  $\sigma(\lambda\mu)\varphi(\vec{x}) = \varphi(\lambda\mu\vec{x}) = \sigma(\lambda)\varphi(\mu\vec{x}) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)\varphi(\vec{x})$  et donc  $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$  (encore parce que  $\varphi(\vec{x}) \neq \vec{0}$ ).

Enfin, on a  $\sigma(1)\varphi(\vec{x}) = \varphi(1\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$  de sorte que  $\sigma(1) = 1$ .  $\square$

**Proposition 5.1.10.** Le seul automorphisme de  $\mathbf{R}$  est l'identité.

*Démonstration.* Soit  $\tau: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  un automorphisme. On a  $\tau(0) = \tau(0-0) = \tau(0) - \tau(0) = 0$ . Cela implique déjà que pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on a  $\tau(-\lambda) = \tau(0 - \lambda) = \tau(0) - \tau(\lambda) = -\tau(\lambda)$ .

• Si  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ , on a donc  $\tau(\lambda + \mu) = \tau(\lambda - (-\mu)) = \tau(\lambda) - \tau(-\mu) = \tau(\lambda) + \tau(\mu)$ . Une récurrence immédiate implique donc que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a  $\tau(n\lambda) = n\tau(\lambda)$ . Comme on a aussi  $\tau(-n\lambda) = -\tau(n\lambda) = -n\tau(\lambda)$ , l'égalité  $\tau(n\lambda) = n\tau(\lambda)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

• En particulier, si  $m \in \mathbf{N}_{>0}$ , on a  $1 = \tau(1) = \tau(m\frac{1}{m}) = m\tau(\frac{1}{m})$ , de sorte que  $\tau(\frac{1}{m}) = \frac{1}{m}$  en divisant par  $m$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  et  $m \in \mathbf{N}_{>0}$ , on a  $\tau(\frac{n}{m}) = n\tau(\frac{1}{m}) = \frac{n}{m}$ , ce qui signifie que  $\tau(\lambda) = \lambda$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{Q}$ .

• Si  $\lambda \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ , on a  $\tau(\lambda) = \tau(\sqrt{\lambda})^2 \geq 0$ , ce qui implique que  $\tau(\mathbf{R}_{\geq 0}) \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$ . Si maintenant  $\lambda \leq \mu$ , on a  $\mu - \lambda \geq 0$ , donc  $\tau(\mu) - \tau(\lambda) = \tau(\mu - \lambda) \geq 0$  i.e.  $\tau(\lambda) \leq \tau(\mu)$ , et  $\tau$  est croissante. Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$  quelconque. Pour  $n \in \mathbf{N}_{>0}$ , on a  $[n\lambda] \leq n\lambda < [n\lambda] + 1$  (où  $[.]$  désigne la partie entière), d'où  $\frac{[n\lambda]}{n} \leq \lambda < \frac{[n\lambda]+1}{n}$ . Comme  $\tau$  est croissante, on a donc aussi  $\tau(\frac{[n\lambda]}{n}) \leq \tau(\lambda) \leq \tau(\frac{[n\lambda]+1}{n})$ . Mais comme  $\frac{[n\lambda]}{n}$  et  $\frac{[n\lambda]+1}{n}$  sont rationnels, on a  $\tau(\frac{[n\lambda]}{n}) = \frac{[n\lambda]}{n}$  et  $\tau(\frac{[n\lambda]+1}{n}) = \frac{[n\lambda]+1}{n}$  d'après ce qu'on a vu plus haut, soit

$$\frac{[n\lambda]}{n} \leq \tau(\lambda) \leq \frac{[n\lambda]+1}{n}$$

C'est vrai pour tout  $n \in \mathbf{N}_{>0}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[n\lambda]}{n} = \lambda$ : on a  $\tau(\lambda) = \lambda$ . Comme c'est vrai pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on a  $\tau = \text{Id}_{\mathbf{R}}$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 5.1.1.* D'après ce qui précède, pour tout  $\vec{x} \in E$ , on a  $f(\omega + \vec{x}) = f(\omega) + \varphi(\vec{x})$  où  $\varphi: E \rightarrow E$  vérifie  $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$  pour tout  $\vec{x}, \vec{y} \in E$  (lemme 5.1.6) et  $\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x})$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$  et  $\vec{x} \in E$  (cf lemmes 5.1.7 & 5.1.9 et proposition 5.1.10). L'application  $\varphi$  est donc linéaire, et  $f$  est affine.  $\square$

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BORDEAUX, UNIVERSITÉ BORDEAUX 1, 351, COURS DE LA LIBÉ-  
RATION, 33405 TALENCE