Université de Bordeaux
Semestre 7

Master Mathématiques fondamentales
Théorie de Galois et représentations

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1
Soient K un corps, E un K-espace vectoriel et $\mathcal{L} \subset \mathcal{G} \subset E$. On suppose que la famille $\mathcal{L}$ est libre, et que la famille $\mathcal{G}$ est génératrice. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. En déduire que tout espace vectoriel admet une base.

Exercice 2
Soient X et Y deux ensembles. Montrer que X s'injecte dans Y ou Y s'injecte dans X.

Exercice 3
On pose $S = \{2^{1/n}\}_{n\in\mathbf{N}_{>0}}$. Montrer que l'extension $\mathbf{Q}(S)/\mathbf{Q}$ est algébrique. Est-elle finie ?

Exercice 4
(1) Que vaut $[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) : \mathbf{Q}]$? Donner une base de $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ vu comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.
(2) Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.
(3) Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sur $\mathbf{Q}$?

Exercice 5
Soit $P(X) = X^4 - 2X^2 + 9 \in \mathbf{Q}[X]$.
(1) Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.
(2) Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, i)$ est un corps de décomposition de $P(X)$ sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 6
Soient K un corps et L une extension finie de K de degré m. Soit $P \in K[X]$ irréductible de degré d.
(1) On suppose m et d premiers entre eux. Montrer que P est irréductible dans $L[X]$ (on pourra considérer une extension de L engendrée par une racine de P).
(2) Démontrer que le polynôme $X^{12} + 30X^8 + 36X + 24$ est irréductible sur $\mathbf{Q}(\sqrt[5]{7})$.

Exercice 7
Désignons par α le réel $\sqrt{1+\sqrt{3}}$.
(1) Trouver le polynôme minimal P de α sur $\mathbf{Q}$. Que vaut $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$?
(2) Prouver que $K = \mathbf{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$ est le corps de décomposition de P dans $\mathbf{C}$.
(3) Calculer le degré de K sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 8
Soient p un nombre premier et K un corps. Soit $b \in K$; posons $Q(X) = X^p - b$.
(1) Soit $P(X) = X^d - a_1X^{d-1} + \cdots + (-1)^d a_d$ un facteur unitaire de Q. Montrer que $a_d^p = b^d$.
(2) En déduire que Q est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si Q n'a pas de racine dans K.

Exercice 9
Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on choisit $\zeta \in \mathbf{C}$ une racine primitive n-ième de l'unité et on pose

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ \mathrm{pgcd}(k,n)=1}} (X - \zeta^k).$$

On veut montrer que Φ_n est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}$.
(1) Montrer que $\prod_{d|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$. En déduire que $\Phi_n \in \mathbf{Z}[X]$ et que le polynôme minimal de ζ appartient à $\mathbf{Z}[X]$.
(2) Soit p un nombre premier ne divisant pas n. Montrer que ζ et ζ^p ont même polynôme minimal (on pourra raisonner dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$).
(3) En déduire que Φ_n est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 10
Soient p un premier impair et $P(X)$ un diviseur irréductible de X^4+1 dans $\mathbf{F}_p[X]$. Soit d le degré de $P(X)$. On note K le corps $\mathbf{F}_p[X]/\langle P(X)\rangle$ et α la classe de X dans K.
(1) Quelle est la caractéristique de K ? Quel est son cardinal ?
(2) Montrer que $\alpha \in K^\times$ et que $(\alpha+\alpha^{-1})^2 = 2$.
(3) Prouver que 2 est un carré dans $\mathbf{F}_p$ si et seulement si $\alpha+\alpha^{-1} \in \mathbf{F}_p$.
(4) Montrer que $\alpha^3+\alpha^{-3} \neq \alpha+\alpha^{-1}$.
(5) En déduire que 2 est un carré dans $\mathbf{F}_p$ si et seulement si $p \equiv \pm 1 \bmod 8$.

Exercice 11
(Extension transcendante). Soit K un corps.
(1) Soit $R \in K(X)\backslash K$. Montrer que X est algébrique sur $K(R)$.
(2) Soit L un sous-corps de $K(X)$ contenant strictement K. Prouver que $K(X)$ est une extension finie de L.

Exercice 12
(Critère de Steinitz). Soient K un corps et L une extension finie de K. On pose $d = [L:K]$ et on note $\mathscr{E}$ l'ensemble des sous-corps de L contenant K.
(1) Supposons K infini. Soient V un K-espace vectoriel et $V_1,\ldots,V_n$ des sous-espaces vectoriels de V différents de V. Démontrer que $\bigcup_{i=1}^{n} V_i \neq V$.
(2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
  (i) la K-extension L est monogène ;
  (ii) l'ensemble $\mathscr{E}$ est fini.
(3) Supposons L monogène sur K. Prouver que tout élément de $\mathscr{E}$ est monogène sur K.

Exercice 13
Soient p un nombre premier et X, Y deux indéterminées et $K = \mathbf{F}_p(X^p, Y^p) \subset L = \mathbf{F}_p(X,Y)$.
(1) Montrer que $[L:K] = p^2$.
(2) Montrer que L/K n'est pas monogène.
(3) Exhiber une infinité de sous-extensions de L/K.

Exercice 14
Désignons par α le réel $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
(1) Déterminer le polynôme minimal P de α sur $\mathbf{Q}$. Que vaut $[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]$?
(2) Vérifier que $\mathbf{Q}(\alpha)$ est une extension de décomposition de $P \in \mathbf{Q}[X]$.

Exercice 15
Soient p un nombre premier et K un corps de caractéristique p.
(1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
  (i) Le morphisme de Frobenius $K \to K$ est surjectif ;
  (ii) Tout polynôme irréductible sur K est séparable sur K.
(2) Prouver que le polynôme $X^p - T$ est irréductible et inséparable sur $K(T)$.

Exercice 16
Soient K un corps et L une extension algébrique de K. Soient Ω une clôture algébrique de L et x un élément de Ω séparable sur K. Démontrer que x est séparable sur L.

Exercice 17
Soient K un corps et L une extension algébrique de K. Soit $\sigma\colon L \to L$ un K-morphisme.
(1) Soit $y \in L$. Désignons par P le polynôme minimal de y sur K, et par R l'ensemble des racines de P dans L. Montrer que $\sigma(R) = R$.
(2) En déduire que σ est bijective.

Exercice 18
Soient $K \subset \mathbf{C}$ et $L \subset \mathbf{C}$ deux corps de nombres. On suppose que $[KL:\mathbf{Q}] = [K:\mathbf{Q}][L:\mathbf{Q}]$. Montrer que l'application $\mathsf{Hom}_L(KL,\mathbf{C}) \to \mathsf{Hom}_{\mathbf{Q}}(K,\mathbf{C})$ qui à σ associe $\sigma_{|K}$ est une bijection.