Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1
Montrer que si H et K sont deux sous-groupes stricts de G, on a $H \cup K \neq G$.

Exercice 2
Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes finis de G. Montrer que le cardinal du sous-groupe de G engendré par H et K est supérieur ou égal à $\frac{\#H\#K}{\#(H\cap K)}$.

Exercice 3
Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 4
Montrer que le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 5
Soit G un groupe. On note D (resp. C) le sous-groupe de G engendré par $\{ghg^{-1}h^{-1}\}_{g,h\in G}$ (resp. $\{g^2\}_{g\in G}$). Montrer que C et D sont distingués dans G, puis que $D \subset C$.

Exercice 6
Soit p un nombre premier. Montrer qu'un groupe d'ordre $2p$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2p\mathbf{Z}$ ou au groupe diédral D_{2p}.

Exercice 7
Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice n. Montrer que H contient un sous-groupe K de G distingué et tel que $[G : K]$ divise $n!$.

Exercice 8
(1) Soient G un groupe et $\mathsf{Z}(G)$ son centre. Montrer que si $G/\mathsf{Z}(G)$ est monogène, alors G est abélien.

Soit p un nombre premier.

(2) Montrer que le centre d'un p-groupe non trivial est non trivial.
(3) Classifier les groupes d'ordre p^2 à isomorphisme près.

Exercice 9 Soient p et q deux nombres premiers tels que $p < q$, que q ne divise pas $p^2 - 1$ et p ne divise pas $q - 1$. Soit G un groupe d'ordre p^2q. Montrer que G est abélien. Application : montrer qu'un groupe d'ordre 99 est abélien. Classifier les groupes d'ordre 99 à isomorphisme près.

Exercice 10
(Cauchy). Soient G un groupe fini et p un nombre premier divisant $\#G$. Montrer que G contient un élément d'ordre p [faire agir $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur l'ensemble $X := \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \,;\, g_1 \cdots g_p = e\}$].

Exercice 11
Soit G un groupe. Son *groupe dérivé* est le sous-groupe $\mathrm{D}(G)$ de G engendré par les commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$ pour $g, h \in G$. Montrer l'équivalence, pour H un sous-groupe de G :

$$(H \supset \mathrm{D}(G)) \Leftrightarrow (H \text{ est distingué et } G/H \text{ est commutatif}).$$

Définition. Soit G un groupe.
(1) La *suite dérivée* de G est la suite $(\mathrm{D}^i(G))_{i\in\mathbf{N}}$ de sous-groupes de G définie par $\mathrm{D}^0(G) = G$ et $\mathrm{D}^{i+1}(G) = \mathrm{D}\left(\mathrm{D}^i(G)\right)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.
(2) On dit que G est *résoluble* s'il existe une suite de sous-groupes

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_{n-1} \geqslant G_n = \{e\}$$

telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait $G_i \lhd G_{i-1}$ et G_{i-1}/G_i abélien (on dit alors que $(G_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une *suite de résolubilité* de G).

Exercice 12
Montrer qu'un groupe résoluble admet une suite de résolubilité dont tous les quotients sont cycliques.

Exercice 13
Montrer qu'un groupe G est résoluble si et seulement si sa suite dérivée est stationnaire à $\{e\}$.

Définition. Le plus petit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{D}^n(G) = \{e\}$ est appelé la *classe de résolubilité* de G.

Exercice 14
Montrer que tout sous-groupe et tout quotient d'un groupe résoluble est résoluble.

Exercice 15
Soient G un groupe et $N \lhd G$ un sous-groupe distingué. Montrer que si N et G/N sont résolubles, il en est de même de G.

Exercice 16
Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est résoluble si et seulement si $n \leqslant 4$.

Exercice 17
Soient p, q et r des nombres premiers distincts. Montrer que tout groupe d'ordre pq ou pqr ou p^2q est résoluble. Montrer que tout p-groupe est résoluble.