Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1
Soient p un nombre premier, G un p-groupe non trivial et K un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Montrer que G possède une représentation non triviale de degré 1 sur K.

Exercice 2
Soient p un nombre premier, G un p-groupe fini et K un corps de caractéristique p.
(1) Montrer que toute représentation linéaire de G sur un K-espace vectoriel non nul admet au moins un vecteur fixe non nul.
(2) Montrer que toute représentation irréductible de G à coefficients dans K est isomorphe à la représentation triviale. A-t-on complète réductibilité des représentations de degré fini dans ce cadre ?

Désormais, les représentations sont supposées complexes et de degré fini.

Exercice 3
Montrer que les représentations irréductibles d'un groupe fini abélien sont toutes de degré 1.

Exercice 4
Soient G un groupe fini et $H \lhd G$ un sous-groupe distingué.
(1) Soient ρ une représentation G/H et $\pi\colon G \to G/H$ la surjection canonique. Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.
(2) Soit π une représentation de G. Démontrer que si $\pi_{|H}$ est une représentation irréductible de H, alors π est irréductible. Donner un contre-exemple à la réciproque de cette assertion.

Exercice 5
Déterminer les représentations irréductibles de $\mathbf{Z}/n\,\mathbf{Z}$, puis celles de $\mathbf{Z}/n\,\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\,\mathbf{Z}$.

Exercice 6
Donner un exemple d'une représentation (V, ρ) d'un groupe G contenant une sous-représentation W n'admettant aucun supplémentaire stable par G.

Exercice 7
Soit Z un sous-groupe central d'un groupe G, et (V, ρ) une représentation de G.
(1) Si V est irréductible, montrer que Z agit sur V par homothéties (*i.e.* que $\rho(Z) \leqslant \mathbf{C}^\times \,\mathsf{Id}_V$).
(2) On suppose que $\mathsf{Z}(G) = \{e\}$ et que $\rho\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ est injective. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que si $\mathsf{Z}(H) \neq \{e\}$, alors $(V, \rho_{|H})$ est réductible.

Exercice 8
Soit G un groupe fini, $H \leqslant G$ un sous-groupe et ρ une représentation de G de caractère χ.
(1) Montrer que la restriction de ρ à H a pour caractère la restriction $\chi_{|H}$.
(2) Si ρ est irréductible, la restriction $\chi_{|H}$ est-elle un caractère irréductible ?

Exercice 9
Soient $\rho\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ et $\sigma\colon G \to \mathsf{GL}(W)$ deux représentations linéaires d'un groupe fini G, de caractères χ_ρ et χ_σ.
(1) La représentation ρ définit une représentation naturelle sur $V^\vee = \mathsf{Hom}_{\mathbf{C}}(V, \mathbf{C})$: l'expliciter et calculer son caractère en fonction de χ_ρ.
(2) Plus généralement, les représentations ρ et σ définissent une représentation naturelle sur $\mathsf{Hom}_{\mathbf{C}}(W, V)$: l'expliciter et calculer son caractère en fonction de χ_ρ et χ_σ.

Exercice 10
Soient G un groupe fini et φ et ψ des caractères de G.
(1) Montrer que si ψ est de degré 1, $\varphi\psi$ est irréductible si et seulement si φ est irréductible.
(2) Montrer que si ψ est de degré strictement supérieur à 1, le caractère $\psi\overline{\psi}$ n'est pas irréductible.
(3) Soit φ un caractère irréductible de G. On suppose que φ est le seul caractère irréductible de son degré. Montrer que s'il existe un caractère ψ de degré 1 et $g \in G$ tel que $\psi(g) \neq 1$, alors $\varphi(g) = 0$.

Exercice 11
Soit G un groupe fini et X un ensemble fini sur lequel G agit transitivement. Notons ρ la représentation de permutation définie par X et χ son caractère.
(1) Montrer la décomposition $\rho = \mathbf{1} \oplus \theta$, où θ ne contient pas la représentation triviale.
On fait opérer G diagonalement sur le produit $X \times X$ en posant $g(x, y) = (gx, gy)$ pour tout $g \in G$ et $x, y \in X$.
(2) Montrer que le caractère de la représentation de permutation sur $X \times X$ est χ^2.
(3) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) l'action de G sur X est doublement transitive ;
   (ii) on a $\langle \mathbf{1} | \chi^2 \rangle = 2$;
   (iii) la représentation θ est irréductible.

Exercice 12
Soient G un groupe fini d'élément neutre e, et (V, ρ) une représentation de caractère χ. On note $\chi_1, \ldots, \chi_r$ les caractères irréductibles de G.
(1) Montrer que $(\forall g \in G)\ |\chi(g)| \leqslant \chi(e)$, avec égalité si et seulement si $\rho(g) = \lambda \, \mathsf{Id}_V$, avec $\lambda \in \mathbf{C}$ une racine de l'unité.
(2) Montrer que $\mathsf{Ker}(\rho) = \mathsf{Ker}(\chi) := \{g \in G\,;\, \chi(g) = \chi(e)\}$.
(3) Soient χ un caractère et $\chi = \sum_{i=1}^{r} m_i \chi_i$ sa décomposition en somme de caractères irréductibles. Montrer que $\mathsf{Ker}(\chi) = \bigcap_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ m_i > 0}} \mathsf{Ker}(\chi_i)$.
(4) Montrer que les sous-groupes distingués de G sont les intersections $\bigcap_{i \in I} \mathsf{Ker}(\chi_i)$ où $I \subset \{1, \ldots, r\}$.
Remarquons que cela implique que le groupe G est simple si et seulement si les noyaux de ses caractères irréductibles non triviaux sont tous réduits à $\{e\}$.
(5) Soient N est un sous-groupe distingué de G et $c(g_1), \ldots, c(g_m)$ les classes de conjugaison telles que $N = \bigsqcup_{j=1}^{m} c(g_j)$. Montrer que $\#N = \#G \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{r} |\chi_i(g_j)|^2 \right)^{-1}$.

Exercice 13
Soit G un groupe fini. Le but de l'exercice est de prouver que si (V, ρ) est une représentation irréductible de G, alors $\dim_{\mathbf{C}}(V) \mid \#G$.
Si $g \in G$, on note $c(g)$ la classe de conjugaison de g, et on pose $P(g) = \sum_{h \in c(g)} h \in \mathbf{Z}[G] \subset \mathbf{C}[G]$.
Fixons $\{g_1, \ldots, g_k\} \subset G$ un système complet de représentants des classes de conjugaison de G et posons $\widetilde{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\#G}{\#c(g_i)} P(g_i) P(g_i^{-1})$ (on a aussi $\widetilde{P} \in \mathbf{Z}[G]$). Si (V, ρ) est une représentation de G, on pose $P_V(g) = \rho(P(g)) = \sum_{h \in c(g)} \rho(h) \in \mathsf{End}(V)$ et $\widetilde{P}_V = \rho(\widetilde{P}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\#G}{\#c(g_i)} P_V(g_i) P_V(g_i^{-1}) \in \mathsf{End}(V)$.
(0) Expliquer pourquoi on a effectivement $\widetilde{P} \in \mathbf{Z}[G]$.
(1) Montrer que si (V, ρ) est irréductible, on a $P_V(g) = \frac{\#c(g)}{\dim_{\mathbf{C}}(V)} \chi_V(g) \, \mathsf{Id}_V$.
(2) En déduire que si (V, ρ) est irréductible, on a $\widetilde{P}_V = \left(\frac{\#G}{\dim_{\mathbf{C}}(V)}\right)^2 \mathsf{Id}_V$.
(3) Soit $x \in \mathbf{Q}$. Si x est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers, alors $x \in \mathbf{Z}$.
(4) Notons $R = \mathbf{C}[G]$ la représentation régulière de G, et soit (V, ρ) une représentation irréductible de G.
   (i) Expliquer pourquoi le polynôme caractéristique $f(X)$ de $\widetilde{P}_R$ est à coefficients entiers.

(ii) Expliquer pourquoi $\left(\frac{\#G}{\dim_{\mathbf{C}}(V)}\right)^2$ est valeur propre de $\widetilde{P}_R$.
(iii) En déduire que $\dim_{\mathbf{C}}(V) \mid \#G$.

Exercice 14
Soit G un groupe fini simple et non abélien.
(1) Montrer que toute représentation de degré 1 de G est triviale.
(2) En déduire que si (V, ρ) est une représentation irréductible de G, on a $\rho(G) \leqslant \mathsf{SL}(V)$.
(3) Montrer que G n'a pas de représentation irréductible de degré 2.