Université de Bordeaux **Master Mathématiques fondamentales**
Semestre 7 **Théorie de Galois et représentations**

DM n°1 (année 2022/2023) - corrigé

Exercice 1. Soient $h \in H$ et $g \in G$. Comme $H \trianglelefteq G$, on a $ghg^{-1} \in H$, et donc $ghg^{-1}h^{-1} \in H$. Comme $ghg^{-1}h^{-1} \in [G, G]$ par définition, on a $ghg^{-1}h^{-1} = e$ en vertu de l'hypothèse, et donc $gh = hg$. Comme c'est vrai pour tout $g \in G$, on a $h \in \mathsf{Z}(G)$. Comme c'est vrai pour tout $h \in H$, on a $H \leq \mathsf{Z}(G)$.

Exercice 2. Soit $H' \leq G$ un sous-groupe d'ordre n. Notons $\pi\colon G \to G/H$ la surjection canonique : si $x \in H'$, on a $x^n = e_G$ (théorème de Lagrange dans H') et $\pi(x)^m = e_{G/H}$ (théorème de Lagrange dans G/H). Comme $\mathsf{pgcd}(n, m) = 1$, il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $nu + mv = 1$, et $\pi(x) = \pi(x)^{nu+mv} = \pi(x^n)^u(\pi(x)^m)^v = e_{G/H}$, *i.e.* $x \in \mathrm{Ker}(\pi) = H$. Comme c'est vrai pour tout $x \in H'$, on a $H' \leq H$, d'où $H' = H$ par cardinalité.

Exercice 3. Comme $H \trianglelefteq G$, l'action de G sur lui-même par conjugaison induit une action sur H, donc sur $H \setminus \{e\}$ (parce que e est fixe). Cette action est décrite par un morphisme de groupes $\rho\colon G \to \mathfrak{S}_{H\setminus\{e\}} \simeq \mathfrak{S}_{p-1}$. Par hypothèse, les facteurs premiers de $\#G$ sont tous supérieurs à p : on a $\#\operatorname{Im}(\rho) \mid \mathsf{pgcd}(\#G, (p-1)!) = 1$, et ρ est trivial. L'action est donc triviale, *i.e.* $H \setminus \{e\} \subset \mathsf{Z}(G)$, d'où $H \leq \mathsf{Z}(G)$.

Remarque. Autre rédaction : on a $\operatorname{Im}(\rho) \leq \operatorname{Aut}(H)$. Comme $\#H = p$, on a $H \simeq \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, et $\operatorname{Aut}(H) \simeq (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ est d'ordre $p - 1$: on conclut comme plus haut.

Exercice 4. (1) On a $AT_{i,j}(a) = A + aAE_{i,j}$. La matrice $AE_{i,j}$ est nulle à l'exception de la j-ème colonne, qui est égale à la i-ème colonne de A. La multiplication à droite par $T_{i,j}(a)$ correspond donc à l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + aC_i$ (sur les colonnes de A). De même, la multiplication à gauche par $T_{i,j}(a)$ correspond à l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ (sur les lignes).
(2) Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{GL}_2(K)$: montrons qu'il existe deux matrices $T, T' \in \mathsf{GL}_2(K)$, produit de matrices de transvection, et telles que TAT' soit diagonale. Si $a = 0$, alors $c \neq 0$ (car A est inversible) $T_{1,2}(1)A = \left(\begin{smallmatrix} c & b+d \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, ce qui ramène au cas où $a \neq 0$. On a alors $T_{2,1}(-a^{-1}c)AT_{1,2}(-a^{-1}b) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d-a^{-1}bc \end{smallmatrix}\right) = D(a, d - a^{-1}bc)$. On a donc montré l'existence de T et T' et de $\underline{\lambda} \in \left(K^\times\right)^2$ tels que $TAT' = D(\underline{\lambda})$, de sorte que $A = T^{-1}D(\underline{\lambda})T'^{-1}$. On conclut en observant que si $i \neq j$ et $\alpha \in K$, on a $T_{i,j}(\alpha)^{-1} = T_{i,j}(-\alpha)$.
(3) Si $i = 1$, on a $T_{i,i}(\beta) = \operatorname{diag}(1 + \beta, 1)$: si $\beta \neq -1$, on a $T_{i,i}(\beta)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1+\beta}, 1\right) = I_2 - \frac{\beta}{1+\beta}E_{i,i}$. Le calcule est le même pour $i = 2$. On a alors

$$\begin{aligned}
[T_{i,j}(\alpha, T_{i,i}(\beta)] &= T_{i,j}(\alpha)T_{i,i}(\beta)T_{i,j}(\alpha)^{-1}T_{i,i}(\beta)^{-1} = (I_2 + \alpha E_{i,j})(I_2 + \beta E_{i,i})(I_2 - \alpha E_{i,j})\big(I_2 - \tfrac{\beta}{1+\beta}E_{i,i}\big) \\
&= (I_2 + \alpha E_{i,j} + \beta E_{i,i})\big(I_2 - \alpha E_{i,j} - \tfrac{\beta}{1+\beta}E_{i,i}\big) \\
&= I_2 + \alpha E_{i,j} + \beta E_{i,i} - \alpha E_{i,j} - \alpha\beta E_{i,j} - \tfrac{\beta}{1+\beta}E_{i,i} - \tfrac{\beta^2}{1+\beta}E_{i,i} = I_2 - \alpha\beta E_{i,j} = T_{i,j}(-\alpha\beta)
\end{aligned}$$

car $\beta - \frac{\beta}{1+\beta} - \frac{\beta^2}{1+\beta} = 0$ (dans le calcul, on a utilisé à plusieurs reprises l'égalité $E_{i,j}E_{i,i} = 0$).
(4) Si $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \left(K^\times\right)^2$, on a $D(\underline{\lambda})J_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et de même $D(\underline{\lambda})^{-1}J_2^{-1} = D\left(\underline{\lambda}^{-1}\right)J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1^{-1} \\ \lambda_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ (en posant $\underline{\lambda}^{-1} = \left(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}\right)$), d'où $[D(\underline{\lambda}), J_2] = \operatorname{diag}\left(\lambda_1\lambda_2^{-1}, \lambda_1^{-1}\lambda_2\right)$.
(5) Si $A, B \in \mathsf{GL}_2(K)$, on a $\det([A, B]) = \det(ABA^{-1}B^{-1}) = \det(A)\det(B)\det(A)^{-1}\det(B)^{-1} = 1$, ce qui implique que $[\mathsf{GL}_2(K), \mathsf{GL}_2(K)] \subset \mathsf{SL}_2(K)$. Réciproquement, soit $A \in \mathsf{SL}_2(K)$. D'après (la preuve) de la question (2), il existe $T, T' \in \mathsf{SL}_2(K)$ produit de matrices de transvection et $\lambda \in K^\times$ tels que $A = T'D(\lambda, \lambda^{-1}\big)T'$: pour prouver l'égalité $[\mathsf{GL}_2(K), \mathsf{GL}_2(K)] \subset \mathsf{SL}_2(K)$, il suffit donc de montrer que $[\mathsf{GL}_2(K), \mathsf{GL}_2(K)]$ contient les matrices de transvection et les matrices de la forme $D(\lambda, \lambda^{-1}\big)$ avec $\lambda \in K^\times$. Supposons $K \neq \mathbf{F}_2$: on peut choisir $\beta_0 \in K^\times \setminus \{1\}$.

- Si $1 \leq i \neq j \leq 2$ et $a \in K$, on a $T_{i,j}(a) = [T_{i,j}(-\beta_0^{-1}a), T_{i,i}(\beta_0)]$ en vertu de la question (3) ;
- Si $\lambda \in K^\times$, on a $D(\lambda, \lambda^{-1}\big) = [D(\lambda, 1), J_2]$ en vertu de la question (4) ;

ce qui conclut.

On a $\mathsf{GL}_2(\mathbf{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$ (isomorphisme fourni par l'action de $\mathsf{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ sur $\mathbf{F}_2^2 \setminus \{0\}$), et $[\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_3] = \mathfrak{A}_3$. Cela montre que $[\mathsf{GL}_2(\mathbf{F}_2), \mathsf{GL}_2(\mathbf{F}_2)]$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathsf{SL}_2(\mathbf{F}_2) = \mathsf{GL}_2(\mathbf{F}_2)$.