UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
Théorie des Groupes

Devoir surveillé, le 28 octobre 2022

Durée 1h30. Documents non autorisés

Exercice 1. Les questions 1) et 2) peuvent être traitées indépendamment.

1) Donner tous les automorphismes du groupe $(\mathbf{Q}, +)$.

2) Soit G un groupe. Montrer que si le groupe $\mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes de G est monogène, alors G est abélien.

Exercice 2. Rappelons qu'une action d'un groupe sur un ensemble est dite transitive lorsqu'elle possède une orbite et une seule. Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe un sous-groupe H de S_6 isomorphe à S_5 qui opère transitivement sur $\{1, 2, \dots, 6\}$.

1) Soit H un sous-groupe distingué de S_n ($n \geqslant 5$). Prouver que $H = \{e\}$, A_n ou S_n.

2) Soit P un 5-sous-groupe de Sylow de S_5. On considère le normalisateur N de P dans S_5:

$$N = \{g \in S_5 \mid gPg^{-1} \subset P\}.$$

On pose $m = (S_5 : N)$. Prouver que m divise 24 et que $m \equiv 1 \pmod 5$.

3) Prouver que $m \neq 1$. En déduire que $m = 6$ et $|N| = 20$.

4) Montrer qu'il existe un homomorphisme injectif $\varphi : S_5 \to S(S_5/N) \simeq S_6$.

5) Conclure.

Tournez la page s.v.p.

Exercice 3. Soit G un groupe simple non-abélien d'ordre $|G| = p^r m$, avec $r \geqslant 1$ et m non divisible par p. On note n_p le nombre de p-sous-groupes de Sylow de G.

1) Montrer que $|G|$ divise $n_p!$, puis que p^r divise $(m-1)!$.

2) Montrer qu'un groupe d'ordre 945 n'est jamais simple.

FIN