TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE
FEUILLE D'EXERCICES N°1

MASTER DE MATHÉMATIQUES, PREMIER SEMESTRE, ANNÉE 2005/2006

Exercice 1. Montrer que la donnée d'une distance sur un ensemble définit une topologie.

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique. Si $A \subseteq E$, et $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

(i) Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.
(ii) Supposons A non vide. Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est continue.
(iii) Soient F, G deux fermés non vides tels que $F \cap G = \varnothing$. Montrer qu'il existe $f\colon E \to [0, 1]$ continue telle que $f_{|F} = 0$ et $f_{|G} = 1$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la distance usuelle. Montrer que la topologie obtenue coïncide avec la topologie produit des n copies de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Montrer que se donner une topologie sur un ensemble E équivaut à se donner, pour tout point $x \in E$, une famille $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{P}(E)$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\forall W \in \mathcal{P}(E)$, $V \subseteq W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(x)$;
(ii) $\forall V, W \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.

Les éléments de $\mathcal{V}(x)$ s'appellent les voisinages de x (ils correspondent aux parties V de E telles qu'il existe un ouvert U avec $x \in U \subseteq V$).

Exercice 5. (a) Sur un ensemble à deux éléments, il existe quatre topologies.
(b) Sur un ensemble fini, la seule topologie séparée est la topologie discrète.

Exercice 6. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble topologique $(E, \mathscr{T})$.

(a) Comparer $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcup_{i \in I} \overline{A}_i$, $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ et $\overline{\bigcup_{i \in I} \overline{A}_i}$.
(b) Comparer $\bigcap_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} \overline{A}_i$ et $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i}$.
(c) Comparer $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcup_{i \in I} \mathring{A}_i$ et $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\circ}$.

Exercice 7. Si $(E, \mathscr{T})$ est un espace topologique et $A \subseteq E$, on note $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ la fontière de A.

(a) Montrer que $\mathrm{Fr}(\mathring{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$, $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$, et que ces trois ensembles peuvent être distincts.
(b) Soient $A, B \subseteq E$. Montrer que $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$, avec égalité si $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, mais qu'en général, ces deux ensembles peuvent être distincts.

Exercice 8. Soit $(E, \mathscr{T})$ est un espace topologique et $A \subseteq E$. Montrer que $A \cup (E \setminus A)^\circ$ est dense dans E.

Exercice 9. Montrer que si U et V sont deux ouverts disjoints d'un espace topologique $(E, \mathscr{T})$, alors $\overset{\circ}{\overline{U}}$ et $\overset{\circ}{\overline{V}}$ sont disjoints.

Exercice 10. On identifie comme d'habitude $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Alors $[0,1]$ a un intérieur non vide relativement à $\mathbb{R}$, mais un intérieur vide relativement à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie suivante : un ouvert est soit l'ensemble vide, soit le complémentaire d'une partie finie ou dénombrable. Montrer qu'il s'agit bien d'une topologie, et que pour cette topologie, toute intersection dénombrable d'ouverts est un ouvert.

Caractériser les parties de $\mathbb{R}$ sur lesquelles cette topologie induit la topologie discrète.

$\mathbb{R}$ est-il séparé pour cette topologie ?

Exercice 12. Soit A un anneau commutatif. On note $\operatorname{Spec} A$ l'ensemble de ses idéaux premiers. Si $I \subseteq A$ est un idéal, on pose $\mathrm{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A,\ I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Montrer que $\mathrm{V}(I) \cup \mathrm{V}(I') = \mathrm{V}(II')$ et $\bigcap_\lambda \mathrm{V}(I_\lambda) = \mathrm{V}\left(\sum_\lambda I_\lambda\right)$. En déduire que les $\mathrm{V}(I)$ sont les fermés d'une topologie (qui s'appelle la *topologie de Zariski*).

Montrer que pour $a \in A$, l'ensemble $\mathrm{D}(a) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A,\ a \notin \mathfrak{p}\}$ est ouvert, et que la famille $\{\mathrm{D}(a)\}_{a \in A}$ est une base de la topologie de $\operatorname{Spec} A$.

Soit $f\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux. Si $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, montrer que $f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$. Notons ${}^{\mathrm{a}}f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ l'application $\mathfrak{q} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{q})$. Montrer que $\left({}^{\mathrm{a}}f\right)^{-1}(\mathrm{V}(I)) = \mathrm{V}(f(I)B)$, et que ${}^{\mathrm{a}}f$ est continue.

Décrire $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]$. Quelle est l'adhérence de $\{0\}$?

Exercice 13. Soient E, F des espaces topologiques, avec F séparé et $f\colon E \to F$ une application continue. Le graphe $\Gamma = \{(x, f(x)) \in E \times F,\ x \in E\}$ est une partie fermée de $E \times F$.

Exercice 14. Soient E, F deux espaces topologiques, $f\colon E \to F$ une application et $x \in E$. On suppose que x admet une base dénombrable de voisinages. Alors f est continue en x si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Exercice 15. Donner un exemple d'application continue bijective dont l'inverse est non continu.

Exercice 16. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. Notons $\widetilde{X} = X/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient. Montrer qu'il existe une unique topologie $\widetilde{\mathscr{T}}$ sur $\widetilde{X}$ ayant la propriété suivante : pour tout espace topologique Y et toute application continue $f\colon X \to Y$ compatible à $\mathcal{R}$, il existe une unique application continue $\widetilde{f}\colon \widetilde{X} \to Y$ telle que $f = \widetilde{f} \circ \pi$ où $\pi\colon X \to \widetilde{X}$ est la projection canonique.

Décrire $\left(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{T}}\right)$ lorsque $X = \mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle) et $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

Exercice 17. Soit $U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ et $f \colon \mathbb{R} \to U,\ t \mapsto \exp(2i\pi t)$.

Soit $g \colon \mathbb{R} \to U^2,\ t \mapsto (f(t), f(\sqrt{2}t))$. Montrer que g est injective et continue, mais n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R})$.