TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE
FEUILLE D'EXERCICES N°4

MASTER DE MATHÉMATIQUES, PREMIER SEMESTRE, ANNÉE 2005/2006

Exercice 1. Soient E, F, G des espaces de Banach, $T\colon E \to F$ et $S\colon F \to G$ des applications linéaires, avec S continue et injective. Montrer que T est continue si et seulement si $S \circ T$ l'est.

Exercice 2. (a) Soient E, F deux espaces de Banach et $T\colon E \to F$ une application linéaire continue "presque surjective" ie. telle qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ et $C \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que pour tout $y \in F$ avec $\|y\| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que $\|y - Tx\| \leq \alpha$ et $\|x\| \leq C$. Montrer que T est en fait surjective, et que pour tout $y \in F$ avec $\|y\| \leq 1$, il existe $x \in E$ tel que $y = Tx$ et $\|x\| \leq \frac{C}{1-\alpha}$.

(b) Montrer que l'ensemble $S(E, F)$ des surjections linéaires continues de E dans F est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 3. (i) Soit $T\colon E \to F$ une application linéaire entre espaces de Banach sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $\varphi \in F'$, on a $\varphi \circ T \in E'$. Montrer que T est continue.

(ii) Soit H un espace de Hilbert, $T\colon H \to H$ linéaire telle que $(\forall (x, y) \in H^2)\ \langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle$. Montrer que T est continue.

Exercice 4. Soient H un espace de Hilbert, F un sous-espace fermé de H tel que $F \neq \{0\}$ et P une projection de H sur F. Montrer qu'on a équivalence entre :

(i) P est la projection orthogonale sur F ;
(ii) $\|P\| = 1$;
(iii) $(\forall x \in H)\ |\langle Px, x \rangle| \leq \|x\|^2$.

(Pour (iii)⇒(i), on pourra appliquer (iii) à $x = y + \lambda z$, pour $y \in F$, $z \in F^{\perp}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$).

Exercice 5. Soient H un espace de Hilbert et $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Rappelons que a est continue si $(\exists C \in \mathbb{R}_{\geq 0})\ (\forall u, v \in H)\ |a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$. On dit qu'elle est coercitive lorsqu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $(\forall u \in H)\ a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$.

Soit $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercitive. Montrer que pour toute forme linéaire $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que $(\forall v \in H)\ \varphi(v) = a(u, v)$ (indication : introduire une application contractante bien choisie et utiliser le théorème du point fixe).

Montrer que si a est symétrique, le vecteur u est caractérisé par

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v) \right).$$

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, f une forme linéaire non nulle sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'hyperplan d'équation $f(x) = \alpha$ est fermé si et seulement si f est continue.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel normé. Soient $x \in E$ et F un sous espace vectoriel fermé de E ne contenant pas x. Montrer qu'on peut séparer strictement x et F, c'est-à-dire qu'il existe une forme linéaire continue f sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $(\forall y \in F)\ f(y) < \alpha < f(x)$.

Exercice 8. Soient E un espace de Banach et $B \subseteq E$ une partie “faiblement bornée”, ie. telle que pour tout $f \in E'$, l'ensemble $\langle f, B\rangle$ est borné. Montrer que B est (fortement) bornée.

Exercice 9. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et E' son dual muni de la norme usuelle. On veut montrer que si E' est séparable alors E est séparable.

(a) On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dense de E'. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $(\forall n \in \mathbb{N})\ f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$.
(b) Montrer que l'espace vectoriel engendré par les x_n est dense dans E.

Exercice 10. (Topologie faible). Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et E' le dual topologique de E. On munit E de la topologie la moins fine rendant continus les éléments de E' et on note $\sigma(E, E')$ cette topologie.

(1) Montrer que la topologie $\sigma(E, E')$ est séparée.
(2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Montrer que :
   i. $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ si et seulement si $(\forall f \in E')\ f(x_n) \to f(x)$;
   ii. si $x_n \to x$ pour $\|.\|$ alors $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$;
   iii. si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;
   iv. si $x_n \rightharpoonup x$ et f_n converge vers f dans $(E', \|.\|_{E'})$ alors $f_n(x_n) \to f(x)$.
(3) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que la topologie faible et la topologie usuelle coïncident.
(4) Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linaire de E dans F. Montrer que T est continue de E dans F pour les topologies fortes si et seulement si T est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(F, \sigma(F, F'))$.

Exercice 11. (Le théorème de Krein-Milman). Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et K une partie de E. On appelle *points extrémaux* de K les points de K qui ne peuvent pas s'écrire comme combinaison strictement convexe de deux points distincts de K (ie. les points x tels que $(\forall y, z \in K)\ ((\exists t \in]0, 1[)\ x = ty+(1-t)z \Rightarrow y = z)$. Donner des exemples.

(i) Prouver que tout compact non vide admet des points extrémaux. On pourra considérer la famille $\mathcal{A} = \mathcal{E}(K)$ de toutes les *parties extrémales* de K, ie. des parties A fermées non vides de K telles que

$$(\forall x, y \in K)\ (\forall t \in]0, 1[)\ tx + (1 - t)y \in A \Rightarrow x, y \in A.$$

On ordonnera $\mathcal{A}$ par inclusion, puis on utilisera le théorème de Zorn pour prouver qu'il existe un élément minimal A_0, et on montrera qu'il est réduit à un point grâce au théorème de Hahn-Banach.
(ii) Soit $X \subseteq E$, $A_1 \in \mathcal{E}(K)$ et $A_2 \in \mathcal{E}(A_1)$, montrer que $A_2 \in \mathcal{E}(K)$.
(iii) Théorème de Krein-Milman : Soit K une partie compacte convexe de E, alors K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux E (c'est-à-dire le plus petit convexe fermé $\overline{\text{co}}(E)$ qui contient E).
On pourra construire, pour $x \in K \setminus \overline{\text{co}}(E)$, un sous-ensemble fermé non vide de K, extrémal, mais qui ne rencontre pas E.