# TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE
# FEUILLE D'EXERCICES N°1

MASTER DE MATHÉMATIQUES, PREMIER SEMESTRE, ANNÉE 2006/2007

**Exercice 1.** Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$. On munit $H = \mathbf{C}^n$ du produit scalaire hermitien canonique défini par

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$$

pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $H$, et on note $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ la norme associée. Soit $u \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(H)$ un endomorphisme de $H$. Rappelons que la *norme* de $u$ est définie par

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

et que l'*adjoint* de $u$ est $u^* = {}^{\mathrm{t}}\overline{u}$ (c'est l'endomorphisme de $H$ caractérisé par $\langle u(x) \mid y \rangle = \langle x \mid u^*(y) \rangle$ pour tout $x, y \in H$).

(1) Montrer les égalités $\|u^*\| = \|u\|$ et $\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|uu^*\|$.

(2) On pose

$$\rho(u) = \max_{\lambda \in S(u)} |\lambda|$$

où $S(u) = \big\{\lambda \in \mathbf{C},\ (\exists x \in H \setminus \{0\},\ u(x) = \lambda x\big\}$ désigne le spectre de $u$. Comparer $\rho(u)$ et $\|u\|$.

(3) Supposons $u$ *autoadjoint* (*i.e.* tel que $u^* = u$). Rappeler pourquoi $u$ est diagonalisable en base orthonormée. Que vaut $\|u\|$ ?

(4) Supposons $n = 2$. Pour $\alpha \in \mathbf{R}_{\geq 0}$, on note $u_\alpha$ l'endomorphisme de $H$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer $\rho(u_\alpha)$ et $\|u_\alpha\|$.

**Exercice 2.** Soient $H$ un espace préhilbertien, $F$ un sous-espace fermé de $H$ tel que $F \neq \{0\}$ et $p$ une projection de $H$ sur $F$. Montrer qu'on a équivalence entre :

(i) $p$ est la projection orthogonale sur $F$ ;

(ii) $\|p\| = 1$ ;

(iii) $(\forall x \in H)\ |\langle p(x) \mid x \rangle| \leq \|x\|^2$.

(Pour (iii)$\Rightarrow$(i), on pourra appliquer (iii) à $x = y + \lambda z$, pour $y \in F$, $z \in \mathrm{Ker}(p)$ et $\lambda \in \mathbf{C}$).

**Exercice 3.** Soient $H$ un espace de Hilbert et $a\colon H \times H \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire. Rappelons que $a$ est continue si $(\exists C \in \mathbb{R}_{\geq 0})\ (\forall u, v \in H)\ |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$. On dit qu'elle est coercitive lorsqu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $(\forall u \in H)\ a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$.

Soit $a\colon H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercitive. Montrer que pour toute forme linéaire $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que $(\forall v \in H)\ \varphi(v) = a(u,v)$ (indication : introduire une application contractante bien choisie et utiliser le théorème du point fixe).

Montrer que si $a$ est symétrique, le vecteur $u$ est caractérisé par

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left( \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \right).$$

**Exercice 4.** Soit $\alpha \in ]0,1]$. Pour toute fonction $f$ continue sur $[0,1]$ on pose

$$K_\alpha(f) = \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \frac{|f(y) - f(x)|}{(y-x)^\alpha}.$$

Soit $L_\alpha$ le sous-espace des fonctions $f$ de $\mathscr{C}^0([0,1])$ telles que cette borne supérieure soit finie (lorsque $\alpha = 1$, c'est l'espace des fonctions lipschitziennes sur $[0,1]$ - sinon on parle aussi de fonctions "Lipschitz - $\alpha$").

(1) Montrer que
$$N_\alpha \colon f \longmapsto |f(0)| + K_\alpha(f)$$
est une norme sur $L_\alpha$.

(2) Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on définit la fonction $f_n$ sur $[0,1]$ par $f_n(x) = nx$ pour $x \leq 1/n$ et $f_n(x) = 1$ pour $x > 1/n$. Montrer que $f_n \in L_\alpha$ et calculer $N_\alpha(f_n)$ pour tout $\alpha \in ]0,1]$ (majorer $|f(y) - f(x)|$ différemment selon que $y - x \leq 1/n$ ou $y - x > 1/n$).

(3) On suppose $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Montrer que $L_\beta \subset L_\alpha$ et que sur $L_\beta$ la norme $N_\beta$ est plus fine que la norme $N_\alpha$. Déduire de la question (2) que ces normes ne sont pas équivalentes.

(4) Montrer que si une suite $(f_n)$ de fonctions de $L_\alpha$ est une suite de Cauchy pour la norme $N_\alpha$ elle converge uniformément dans $\mathscr{C}^0([0,1])$, puis montrer que $L_\alpha$ muni de $N_\alpha$ est complet.

**Exercice 5.** On considère sur $\mathscr{C}^0([0,1])$ les normes usuelles $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ et $f \mapsto \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}\, x\right)^{1/2}$. Soit $E$ un sous-espace de dimension finie $n$ de $\mathscr{C}^0([0,1])$.

(1) Justifier brièvement qu'il existe une constante $M$ telle que
$$\|f\|_\infty \leq M \|f\|_2 \quad \text{pour tout } f \in E.$$

(2) On suppose donnée une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de $E$ orthonormée pour le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_2$. Montrer que la plus petite constante avec cette propriété est
$$M = \sup_{0 \leq x \leq 1} \left( \sum_{j=1}^n |f_j(x)|^2 \right)^{1/2}.$$
(Pour $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$ appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux sommes finies $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x)$ puis, en fixant un point $x$ de $[0,1]$, choisir les $\lambda_j$ de façon que l'égalité soit réalisée.)

(3) En déduire que $M \geq \sqrt{n}$, puis qu'il n'existe pas de sous-espace de dimension infinie de $\mathscr{C}^0([0,1])$ sur lequel les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

**Exercice 6.** Soient $H$ un espace de Hilbert et $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille dénombrable de sous-espaces fermés de $H$. On dit que $H$ est *somme hilbertienne* des $(E_n)$ et on note $H = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} E_n$ si

(i) les $E_n$ sont deux-à-deux orthogonaux ;

(ii) l'espace vectoriel engendré par les $(E_n)$ est dense dans $H$.

On suppose que $H$ est somme hilbertienne des $(E_n)$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $p_n$ le projecteur orthogonal de $H$ sur $E_n$. Pour $u \in H$, on pose $u_n = p_n(u)$. Montrer que

(1) $u = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ (série convergente) ;
(2) $\|u\|^2 = \sum_{n\in\mathbf{N}} \|u_n\|^2$ (égalité de Parseval) ;
(3) si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $H$ telle que $u_n \in E_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\sum_{n\in\mathbf{N}} \|u_n\|^2 < \infty$, la série $u = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ converge dans $H$ et $u_n = p_n(u)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

**Exercice 7.** (Bases hilbertiennes). Soient $H$ un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille dénombrable de vecteurs non nuls de $H$. On dit que $(e_n)$ est une *base hilbertienne* de $H$ si $H$ est somme hilbertienne des sous-espaces $(\mathbf{C}\, e_n)$.

Montrer que tout espace de Hilbert *séparable* (*i.e.* contenant un ensemble dénombrable dense) admet une base hilbertienne. En particulier, un espace de Hilbert séparable est isométrique à $\ell^2(\mathbf{R})$.

**Exercice 8.** (Polynômes orthogonaux). Soit $w$ une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $]a, b[$ (avec $a$ et $b$ pas nécessairement bornés). On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $x^n w(x) \in \mathrm{L}^1(]a, b[)$. On pose

$$H = \mathrm{L}^2(w(x)\,\mathrm{d}\,x) = \left\{ u \text{ mesurable sur } ]a, b[ \text{ telle que } \int_a^b u^2(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x < \infty \right\}$$

muni de la forme bilinéaire définie par

$$\langle u \mid v\rangle = \int_a^b \overline{u(x)}v(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

(1) Rappeler pourquoi $H$ est un espace de Hilbert.
(2) Montrer qu'il existe une unique famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes unitaires avec $P_n$ de degré $n$.
(3) Montrer que si $a$ et $b$ sont finis, $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de $H$, et que pour $n \in \mathbf{N}$, le polynôme $P_n$ admet $n$ racines distinctes, qui appartiennent à $]a, b[$.
(4) On suppose $a = 0$, $b = \infty$ et $w(x) = e^{-\sqrt[4]{x}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty x^n \sin(\sqrt[4]{x})e^{-\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}\,x$$

(indication : c'est la partie imaginaire de $\int_0^\infty x^n e^{(i-1)\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}\,x$). Conclure que dans ce cas, la famille $(P_n)$ n'est pas une base hilbertienne de $H$.

Remarque : pour $w(x) = e^{-x^2}$ sur $\mathbf{R}$, on parle des polynômes de Hermite, pour $w(x) = e^{-x}$ sur $\mathbf{R}_{\geq 0}$, on parle des polynômes de Laguerre, et pour $w(x) = (1-x^2)^\alpha$ sur $[-1, 1]$, on parle des polynômes de Jacobi (de Chebyschev si $\alpha = 1/2$, de Chebyschev de seconde espèce si $\alpha = -1/2$).

**Exercice 9.** (Séries de Fourier) On considère l'espace de Hilbert des fonctions à valeurs complexes

$$H = \mathrm{L}^2\left( ]0, 2\pi[, \frac{\mathrm{d}\,x}{2\pi} \right)$$

muni du produit scalaire défini par

$$\langle u \mid v\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{u(x)}v(x)\frac{\mathrm{d}\,x}{2\pi}.$$

On définit les coefficients de Fourier de $u$ par

$$c_n(u) = \langle e^{inx} \mid u\rangle \qquad \text{pour } n \in \mathbf{Z}$$

et $S_n(u) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(u) e^{ikx}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

(1) Montrer que la famille $(e^{inx})_{n\in\mathbf{Z}}$ est une base hilbertienne de $H$.
(2) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ (noyau de Dirichelet). Montrer que $D_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$.
(3) Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $K_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$ (noyau de Féjer). Montrer que $K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$.
(4) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\int_0^{2\pi} K_n(x) \frac{\mathrm{d}\,x}{2\pi} = 1$ si $\delta \in ]0, \pi]$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(x)\,\mathrm{d}\,x = 0.$$
(5) En déduire que si $u$ une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ telle que $u(2\pi) = u(0)$, les moyennes arithmétiques des $S_n(u)$ convergent uniformément vers $u$ (Féjer).

Remarque : il existe des fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas simplement. Rappelons qu'en revanche, la série de Fourier d'une fonction dérivable par morceaux converge simplement (Dirichelet).