TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE
FEUILLE D'EXERCICES N°4

MASTER DE MATHÉMATIQUES, PREMIER SEMESTRE, ANNÉE 2006/2007

Exercice 1. Soit X une espace compact, Y un espace séparé et $f\colon X \to Y$ une bijection continue. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 2. Soit X un espace compact. On se donne deux fonctions f et g continues sur X telles que $f \geq 0$ sur X et $f(x) = 0 \Rightarrow g(x) > 0$. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $(\forall x \in X)\ \lambda f(x) + g(x) > 0$.

Exercice 3. Soit $a < b$ dans $\mathbf{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone, converge simplement vers une fonction f, et que f est continue. Montrer que la convergence est uniforme (théorème de Dini). On pourra poser $F_{\varepsilon,n} = \{x \in [a, b],\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, pour $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ et $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 4. Soient X un espace topologique compact, F_1 et F_2 deux fermés disjoints de X. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $F_1 \subseteq U_1$ et $F_2 \subseteq U_2$.

Exercice 5. Soit (E, d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de E telle que $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_{n+1}, u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une partie non vide connexe et compacte de E (on pourra poser $U_n = \{u_p,\ p \geq n\}$).

Exercice 6. Soit X un espace topologique et $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides. On note $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

(1) Montrer que $K \neq \varnothing$.
(2) Soit U un ouvert contenant K. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $K_n \subseteq U$.

Exercice 7. Soient X un espace métrique, Y un espace métrique compact et $f\colon X\times Y \to \mathbf{R}$ une application continue. Montrer que les fonctions M et m définies par $M(x) = \sup\limits_{y\in Y} f(x, y)$ et $m(x) = \inf\limits_{y\in Y} f(x, y)$, sont continues sur X.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique compact et $f\colon X \to X$ une dilatation (*i.e.* telle que $(\forall x, y \in X)\ d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$).

(1) Montrer que $(\forall x, y \in X)\ (\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0})\ (\exists p \in \mathbf{N}_{>0})\ d(x, f^p(x)) \leq \varepsilon$ et $d(y, f^p(y)) \leq \varepsilon$. En déduire que f est une isométrie de X sur X.
(2) Montrer que f est un homéomorphisme (on montrera que $f(X)$ est dense dans X).

Exercice 9. (Ensemble triadique de Cantor). Soit $K_0 = [0, 1] \subseteq \mathbf{R}$, et pour $n \in \mathbf{N}$, $K_{n+1} = \frac{1}{3}K_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}K_n\right)$ (on a $K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, $K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ etc.).

(1) Montrer que $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de compacts. Posons $K = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_n$. Montrer que K est un compact non vide.

(2) Montrer que le complémentaire de K est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts, dont la somme des longueurs vaut 1.
(3) Montrer que K est l'ensemble des réels dans $[0, 1]$ dont le développement triadique ne comporte que des 0 et des 2 (en admettant les développements composés uniquement de 2 à partir d'un certain rang).
(4) Montrer que K est en bijection avec $[0, 1]$ mais que K est d'intérieur vide.

Exercice 10. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
(1) Soit F un sous-espace fermé strict de E (*i.e.* tel que $F \neq E$). Montrer que

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_{>0})\ (\exists x \in E)\ \|x\| = 1 \text{ et } \operatorname{dist}(x, F) \geq 1 - \varepsilon.$$

(2) On suppose que la boule unité $\mathrm{B}_E = \{x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$ est compacte. Montrer que E est de dimension finie (théorème de Riesz).

Topologie faible $*$. Soient E un espace de Banach, E' son dual, muni de la norme définie par

$$\|\varphi\|_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |\varphi(x)|$$

et E'' son bidual.

Sur l'espace de Banach E', on dispose de la topologie de la norme $\|.\|_{E'}$ et de la topologie faible $\sigma(E', E'')$ (la moins fine qui rend continues les éléments de E''. On en définit une troisième, la *topologie faible* $*$, notée $*\sigma(E', E)$, plus faible que les précédentes, de la façon suivante.

Pour $x \in E$, l'application d'évaluation

$$\iota(x) \colon E' \to \mathbf{R}$$
$$\varphi \mapsto \varphi(x)$$

est linéaire. D'après le théorème de Hahn-Banach, elle est continue et on a

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{\varphi \in E' \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(x)| = \|\iota(x)\|_{E''}.$$

L'aplication $\iota \colon E \to E''$ est donc une isométrie. Elle n'est pas surjective en général.

La topologie faible $*$ sur E' est la topologie la moins fine qui rend continues des applications $\iota(x)$ pour $x \in E$.

Exercice 11. (1) Montrer que la topologie faible $*$ est séparée.
(2) Montrer qu'une base de voisinages de $\varphi_0 \in E'$ pour $*\sigma(E', E)$ est donnée par les ouverts

$$\{\varphi \in E',\ (\forall i \in I)\ |(\varphi - \varphi_0)(x_i)| < \varepsilon\}$$

où I est un ensemble fini, $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq E$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$.

On note $\varphi_n \overset{*}{\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}} \varphi$ pour dire qu'une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E' converge vers φ pour la topologie faible $*$.
(3) $\varphi_n \overset{*}{\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}} \varphi \Leftrightarrow (\forall x \in E)\ \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$.
(4) Si $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \varphi$ (pour la topologie faible $\sigma(E', E'')$) alors $\varphi_n \overset{*}{\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}} \varphi$ (pour la topologie faible $*$).
(5) Si $\varphi_n \overset{*}{\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}} \varphi$, la suite $\{\|\varphi_n\|\}_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée et $\|\varphi\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_n\|$.
(6) Si $\varphi_n \overset{*}{\underset{n\to\infty}{\rightharpoonup}} \varphi$ dans E' et si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ fortement dans E, alors $\varphi_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$.

Exercice 12. (1) Soient V un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires telles que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathsf{Ker}(\varphi_i) \subseteq \mathsf{Ker}(\varphi)$. Montrer que $\varphi \in \mathsf{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

(2) Soit $f\colon E' \to \mathbf{R}$ une forme linéaire continue pour la topologie faible $*$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(\varphi) = \varphi(x)$ pour tout $\varphi \in E'$ (*i.e.* que $f = \iota(x)$).

Exercice 13. Montrer que la boule unité $B_{E'} = \{\varphi \in E',\ \|\varphi\|_{E'} \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible $*$ (théorème de Banach-Alaoglu). [Indication : on pourra considérer l'application $E' \to \mathbf{R}^E; \varphi \mapsto (\varphi(x))_{x \in E}$].