Université de Bordeaux

Licence 3 - année 2023-2024
Structures algébriques 2 - 4TMFF502U

Devoir maison

À rendre le 7 novembre

Soit $n \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que $\mathsf{pgcd}(n, \varphi(n)) = 1$ (où φ est l'indicatrice d'Euler). Le but de l'exercice est de prouver que tout groupe d'ordre n est cyclique.
(1) (a) Donner un exemple d'un tel n.
(b) Prouver que la factorisation de n en produit de nombres premiers est de la forme $n = p_1 \cdots p_r$ avec $p_1, \dots, p_r$ deux à deux distincts.
(c) La condition de (b) est-elle suffisante ?

On procède par récurrence forte sur $r \in \mathbf{N}$, le cas $r \in \{0, 1\}$ étant trivial : on suppose désormais $r > 1$. Soit G un groupe d'ordre n, dont on note e l'élément neutre.

(2) Expliquer pourquoi tout sous-groupe strict de G est cyclique.

(3) Supposons G *simple*. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-groupes stricts maximaux (au sens de l'inclusion) de G (constitué des sous-groupes $H \subsetneq G$ tels que si K est un sous-groupe de G contenant H, on a $K = H$ ou $K = G$).

(a) Montrer que si $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$ sont distincts, on a $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ [indication : montrer que si $x \in H_1 \cap H_2$, son centralisateur $\mathsf{C}_G(x) = \{g \in G\,;\, g^{-1}xg = x\}$ contient H_1 et H_2].
(b) Montrer que $G \setminus \{e\} = \bigsqcup_{H \in \mathcal{M}} (H \setminus \{e\})$.
(c) On fait agir G sur $\mathcal{M}$ par conjugaison. Montrer que l'orbite de $H \in \mathcal{M}$ est de cardinal $(G : H)$.
(d) En dénombrant les éléments de $G \setminus \{e\}$, montrer que $\mathcal{M}$ ne contient qu'une orbite, puis en déduire une contradiction.

Le groupe G n'est donc pas simple : soit $\{e\} \subsetneq H \subsetneq G$ un sous-groupe distingué non trivial. La restriction à H de l'action de G sur lui-même par conjugaison fournit un morphisme de groupes $\rho\colon G \to \mathsf{Aut}(H)$.

(4) Montrer que $\# \mathsf{Aut}(H)$ est premier à n [indication : penser d'abord au cas où $\#H$ est un nombre premier].

(5) En déduire que H est inclus dans le centre $\mathsf{Z}(G)$ de G.

(6) En déduire que G est abélien.

(7) Conclure que G est cyclique.

(8) Réciproquement, montrer que si $n \in \mathbf{N}_{>0}$ est un entier tel que tout groupe d'ordre n est cyclique, alors $\mathsf{pgcd}(n, \varphi(n)) = 1$ [indication : penser aux produits semi-directs].