Université de Bordeaux

Licence 3 - année 2020-2021
Structures algébriques 2 - 4TMFF502U

Devoir maison n°1

Exercice 1

Soient A un anneau (commutatif et unitaire), $I, J \subset A$ des idéaux et $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier tel que $IJ \subset \mathfrak{p}$. Montrer que $I \subset \mathfrak{p}$ ou $J \subset \mathfrak{p}$.

Solution : Supposons $I \not\subset \mathfrak{p}$ et $J \not\subset \mathfrak{p}$: on peut choisir $x \in I \setminus \mathfrak{p}$ et $y \in J \setminus \mathfrak{p}$. On a alors $xy \notin \mathfrak{p}$, mais $xy \in IJ$: contradiction.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble $\{n \in \mathbf{Z}\,;\, n \equiv 3 \mod 15,\, n \equiv 5 \mod 8,\, n \equiv 2 \mod 7\}$.

Solution : Les entiers 15, 8 et 7 sont deux à deux premiers entre eux, et leur produit vaut 840 : d'après le théorème des restes chinois, l'application naturelle

$$\mathbf{Z}/840\,\mathbf{Z} \to (\mathbf{Z}/15\,\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/8\,\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/7\,\mathbf{Z})$$

est un isomorphisme. On a les relations de Bézout $1 = 8 - 7$ et $1 = 15 \times 15 - 4 \times 56$: en les multipliant, il vient $1 = 15 \times (8 \times 15) - 15 \times (7 \times 15) - 4 \times (7 \times 8)$. Si $x, y, z \in \mathbf{Z}$, alors l'entier $n = 15 \times (8 \times 15)z - 15 \times (7 \times 15)y - 4 \times (7 \times 8)x$ vérifie $n \equiv x \mod 15$, $n \equiv y \mod 8$ et $n \equiv z \mod 7$. En particulier, on a $-4947 \equiv 93 \mod 840$ appartient à l'ensemble recherché, qui est donc égal à $93 + 840\,\mathbf{Z}$.

Exercice 3

Soit $A = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ l'anneau des fonctions continues sur le segment $[0,1]$. Si $c \in [0,1]$, posons $\mathfrak{m}_c = \{f \in A\,;\, f(c) = 0\}$.
(0) Déterminer $A^\times$.
(1) Montrer que $\mathfrak{m}_c$ est un idéal maximal de A.
(2) Soit $\mathfrak{m} \subset A$ un idéal maximal. On va montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_c$: on raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $c \in [0,1]$, on a $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}_c$.

(i) Pour $f \in A$, on pose $\mathsf{Z}(f) = f^{-1}(\{0\})$. Montrer que $\bigcap\limits_{f \in \mathfrak{m}} \mathsf{Z}(f) = \varnothing$.

(ii) En utilisant la compacité du segment $[0,1]$, montrer qu'il existe $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{m}$ tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{r} \mathsf{Z}(f_i) = \varnothing$.

(iii) Conclure en considérant l'élément $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i^2$.

(3) Montrer que $\mathfrak{m}_c$ n'est pas engendré par $x \mapsto x - c$.
(4) Montrer que $\mathfrak{m}_c$ n'est pas de type fini [difficile].

Posons $R = \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
(5) Montrer que l'ensemble I des fonctions à support compact est un idéal de R, et que I n'est pas premier.
(6) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R tel que $I \subset \mathfrak{m}$. Montrer que $\mathfrak{m}$ n'est pas de la forme $\{f \in R\,;\, f(c) = 0\}$ avec $c \in \mathbf{R}$.

Solution : (0) Si $f \in A^\times$, il existe $g \in A$ tel que $fg = 1$: pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x)g(x) = 1$, en particulier, $f(x) \neq 0$. Réciproquement, si $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, on dispose de la fonction $\frac{1}{f}$ sur $[0,1]$, et elle est continue. Cela montre que $f \in A^\times$. Il en résulte que $A^\times = \{f \in A\,;\,(\forall x \in [0,1])\, f(x) \neq 0\}$.
(1) $\mathfrak{m}_c$ est le noyau du morphisme $A \to \mathbf{R}$; $f \mapsto f(c)$. Ce dernier étant surjectif, cela implique que $\mathfrak{m}_c$ est maximal, et que $A/\mathfrak{m}_c \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}$.
(2) Comme $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}_c$, on a $\bigcap\limits_{f\in\mathfrak{m}} \mathsf{Z}(f) = \varnothing$. Chaque $\mathsf{Z}(f)$ est fermé dans $[0,1]$ (image inverse d'un fermé par une application continue) : comme $[0,1]$ est compact, il existe $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{m}$ tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{r} \mathsf{Z}(f_i) = \varnothing$. Posons $f = \sum\limits_{i=1}^{r} f_i^2$: on a $f \in \mathfrak{m}$. Si $c \in [0,1]$ est tel que $f(c) = 0$, alors $f_i(c) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, ce qui n'est pas : cela montre que $\mathsf{Z}(f) = \varnothing$. Il en résulte que $f \in A^\times$, et donc que $\mathfrak{m} = A$, contredisant le fait que $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal. Il existe donc $c \in [0,1]$ tel que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_c$, *i.e.* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_c$ par maximalité.
(3) Soit $f_c \in \mathfrak{m}_c$ définie par $f_c(x) = \sqrt{|x-c|}$. Supposons $\mathfrak{m}_c$ engendré par $x \mapsto x - c$: il existe $g \in A$ tel que $\sqrt{|x-c|} = (x-c)g(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Si $x \neq c$, on a donc $1 = \mathsf{sign}(x-c)\sqrt{|x-c|}g(x)$: en faisant tendre x vers c, on obtient $1 = 0$, ce qui est absurde.
(4) Supposons $\mathfrak{m}_c$ de type fini : écrivons $\mathfrak{m}_c = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. L'application f définie par $f(x) = \max\limits_{1\leq i\leq r} \sqrt{|f_i(x)|}$ est continue sur $[0,1]$ et s'annule en c : il existe $g_1, \dots, g_r \in A$ tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{r} f_i g_i$. On a en particulier $f \leq \sum\limits_{i=1}^{r} \|g_i\|_\infty |f_i| \leq rMf^2$, où $M = \max\limits_{1\leq i\leq r} \|g_i\|_\infty$. Cela implique que $1 \leq rMf$ sur $[0,1] \setminus \mathsf{Z}(f)$. Comme f est continue et $\mathsf{Z}(f) \neq \varnothing$ on a nécessairement $\mathsf{Z}(f) = [0,1]$, *i.e.* $f = 0$, ce qui implique $f_1 = \dots = f_r = 0$: contradiction.
(5) I est clairement un idéal de R. Soit $f\colon x \mapsto \max\{0, x\}$ et $g\colon x \mapsto \max\{0, -x\}$: on a $f, g \notin I$, mais $fg = 0 \in I$. Cela montre que I n'est pas premier.
(6) Évident : pour tout $c \in \mathbf{R}$, il existe une fonction à support compact qui ne s'annule pas en c.