Université de Bordeaux

Licence 3 - année 2020-2021
Structures algébriques 2 - 4TMFF502U

Devoir maison n°1

À rendre le 23 octobre (version scannée sur Moodle)

Exercice 1

Soient A un anneau (commutatif et unitaire), $I, J \subset A$ des idéaux et $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier tel que $IJ \subset \mathfrak{p}$. Montrer que $I \subset \mathfrak{p}$ ou $J \subset \mathfrak{p}$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble $\{n \in \mathbf{Z}\,;\, n \equiv 3 \mod 15,\, n \equiv 5 \mod 8,\, n \equiv 2 \mod 7\}$.

Exercice 3

Soit $A = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ l'anneau des fonctions continues sur le segment $[0,1]$. Si $c \in [0,1]$, posons $\mathfrak{m}_c = \{f \in A\,;\, f(c) = 0\}$.

(0) Déterminer $A^\times$.

(1) Montrer que $\mathfrak{m}_c$ est un idéal maximal de A.

(2) Soit $\mathfrak{m} \subset A$ un idéal maximal. On va montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_c$: on raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $c \in [0,1]$, on a $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}_c$.

(i) Pour $f \in A$, on pose $\mathsf{Z}(f) = f^{-1}(\{0\})$. Montrer que $\bigcap\limits_{f \in \mathfrak{m}} \mathsf{Z}(f) = \varnothing$.

(ii) En utilisant la compacité du segment $[0,1]$, montrer qu'il existe $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{m}$ tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{r} \mathsf{Z}(f_i) = \varnothing$.

(iii) Conclure en considérant l'élément $\sum\limits_{i=1}^{r} f_i^2$.

(3) Montrer que $\mathfrak{m}_c$ n'est pas engendré par $x \mapsto x - c$.

(4) Montrer que $\mathfrak{m}_c$ n'est pas de type fini [difficile].

Posons $R = \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

(5) Montrer que l'ensemble I des fonctions à support compact est un idéal de R, et que I n'est pas premier.

(6) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de R tel que $I \subset \mathfrak{m}$. Montrer que $\mathfrak{m}$ n'est pas de la forme $\{f \in R\,;\, f(c) = 0\}$ avec $c \in \mathbf{R}$.