université de BORDEAUX	ANNÉE UNIVERSITAIRE 2021 / 2022 SESSION 1 D'AUTOMNE PARCOURS / ÉTAPE : 4TMA903U Code UE : 4TTN901S, 4TTN901S Épreuve : Structures algébriques 2 Date : 24/10/2022 Heure : 11h Durée : 1h30 Documents et équipements électroniques non autorisés Épreuve de Mr Brinon	Collège Sciences et technologies

Exercice 1

Soit G un groupe d'ordre 33 agissant sur un ensemble de cardinal 19. Montrer qu'il y a au moins un point fixe.

Solution : Le cardinal d'une orbite est un diviseur de 33 : c'est un élément dans $\{1, 3, 11, 33\}$. Supposons qu'il n'y a pas de point fixe : l'équation aux classes est de la forme $19 = 3x + 11y$ (il n'y a pas d'orbite à 33 éléments par cardinalité) avec $x, y \in \mathbf{N}$. On a $y \in \{0, 1\}$, et donc $3x \in \{8, 19\}$ ce qui n'est pas possible. Il y a donc au moins un point fixe.

Exercice 2

Soit G un groupe *simple* d'ordre 180. On note e son élément neutre et pour p premier, n_p le nombre de p-Sylow de G.

(1) Factoriser 180 en produit de puissances de nombres premiers.

(2) Supposons que $n_5 = 6$.

- (i) Montrer que l'action naturelle de G sur l'ensemble des ses 5-Sylow fournit un morphisme injectif $\rho\colon G \to \mathfrak{S}_6$.
- (ii) En considérant le morphisme composé $\varepsilon \circ \rho$ (où ε est la signature), montrer que $\rho(G) \subset \mathfrak{A}_6$.
- (iii) En déduire une contradiction (considérer l'indice $(\mathfrak{A}_6 : \rho(G))$).
- (iv) En déduire que $n_5 = 36$.

(3) Vérifier qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow.

(4) Montrer que $n_3 = 10$.

(5) Soient S_1 et S_2 deux 3-Sylow distincts, $g \in S_1 \cap S_2$ et $C(g) = \{\gamma \in G\,;\, g\gamma = \gamma g\}$ le centralisateur de g dans G.

- (i) Rappeler pourquoi tout groupe d'ordre 9 est abélien. En déduire que $S_i \subset C(g)$ pour $i \in \{1, 2\}$.
- (ii) En utilisant la question (3), en déduire que $(G : C(g)) \in \{1, 2, 4, 5\}$ (on pourra montrer que 9 divise strictement l'ordre de $C(g)$).
- (iii) Conclure que $C(g) = G$, puis que $g = e$.

(6) En comptant le nombre d'éléments d'ordre 5 et le nombre d'éléments d'ordre divisant 9, conclure à une contradiction.

(7) Qu'en déduit-on ?

Solution : (1) On a $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.
(2) (i) L'action de G par conjugaison sur l'ensemble X_5 de ses 5-Sylow fournit un morphisme de groupes $\rho\colon G \to \mathfrak{S}_{X_5} \simeq \mathfrak{S}_6$. Il est non trivial parce que l'action est transitive : on a $\mathsf{Ker}(\rho) \neq G$. Comme G est simple, on a donc $\mathsf{Ker}(\rho) = \{e\}$ et ρ est injectif.

(ii) Notons $\varepsilon\colon \mathfrak{S}_6 \to \{\pm 1\}$ la signature. Le noyau du composé $\varepsilon \circ \rho\colon G \to \{\pm 1\}$ est un sous-groupe distingué de G, d'indice divisant 2, *i.e.* d'ordre 90 ou 180 : comme G est simple, ce noyau est nécessairement G en entier, *i.e.* $\rho(G) \subset \mathfrak{A}_6 = \mathsf{Ker}(\varepsilon)$.
(iii) On a $\#\rho(G) = 180$ et $\#\mathfrak{A}_6 = 360$, donc $(\mathfrak{A}_6 : \rho(G)) = 2$. Étant d'indice 2, le sous-groupe $\rho(G)$ est distingué dans $\mathfrak{A}_6$, ce qui contredit la simplicité de ce dernier : on a une contradiction.
(iv) D'après les théorèmes de Sylow, on a $n_5 \equiv 1 \mod 5$ et $n_5 \mid 2^2 \times 3^2$: les seules valeurs possibles sont 1, 6 et 36. Comme G est simple, on a $n_5 \neq 1$ (sinon l'unique 5-Sylow serait distingué) et $n_5 \neq 6$ en vertu de ce qui précède. On a donc nécessairement $n_5 = 36$.
(3) Soit H un groupe d'ordre $18 = 2 \times 3^2$. Il admet des 3-Sylow, et ceux-ci sont d'indice 2 dans H : ils sont distingués. Comme l'action de H par conjugaison sur l'ensemble des ses 3-Sylow est transitive, cela montre qu'il n'y a qu'un seul 3-Sylow dans H.
(4) D'après les théorèmes de Sylow, on a $n_3 \equiv 1 \mod 3$ et $n_3 \mid 2^2 \times 5$: les seules valeurs possibles sont 1, 4 et 10. Comme G est simple, on a $n_3 \neq 1$ (sinon l'unique 3-Sylow serait distingué). Si on avait $n_3 = 4$, l'action de G sur l'ensemble de ses 3-Sylow fournirait un morphisme $G \to \mathfrak{S}_4$. Ce dernier serait injectif par simplicité de G, impliquant que $180 = \#G \mid \#\mathfrak{S}_4$, ce qui est absurde. On a donc nécessairement $n_3 = 10$.
(5) (i) On a $\#S_i = 9 = 3^2$, ce qui montre que S_i est abélien : on a $g\gamma = \gamma g$ pour tout $\gamma \in S_i$ et donc $S_i \subset C(g)$.
(ii) Comme $S_1 \subset C(g)$, on a $9 \mid \#C(g)$ en vertu du théorème de Lagrange, ce qui montre que $(G : C(g)) \mid \frac{\#G}{9} = 20$. Comme $S_1 \neq S_2$, on a bien sûr $\#C(G) > 9$, donc $(G : C(g)) < 20$. Par ailleurs, le groupe $C(g)$ admet deux 3-Sylow distincts : d'après la question (3), on ne peut pas avoir $\#C(g) = 18$, d'où $(G : C(g)) \neq 10$. On a donc $(G : C(g)) \in \{1, 2, 4, 5\}$.
(iii) Supposons $d = (G : C(g)) > 1$: l'action de G sur l'ensemble quotient $G/C(g)$ fournit un morphisme $G \to \mathfrak{S}_{G/C(g)} \simeq \mathfrak{S}_d$, non trivial parce que l'action est transitive, donc injectif par simplicité de G. Cela implique que $180 = \#G \mid \#\mathfrak{S}_d = d! \mid 5!$, ce qui est absurde. On a donc nécessairement $d = 1$, *i.e.* $C(g) = G$. Il en résulte que g appartient au centre de G, mais par simplicité de G, ce dernier est nécessairement trivial : on a $g = e$.
(6) Les 5-Sylow sont cycliques d'ordre 5 : ils s'intersectent en l'élément neutre. Chacun contient 4 éléments d'ordre 5 : on a donc $4n_5 = 144$. Par ailleurs, les 3-Sylow s'intersectent en $\{e\}$: leur réunion est donc de cardinal $1 + 8n_3$: il y a donc 81 éléments d'ordre divisant 9 dans G. Ce qui précède fournit donc $144 + 81 = 225$ éléments distincts, contredisant le fait que $\#G = 180$.
(7) On a montré qu'un groupe d'ordre 180 n'est jamais simple.