université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2023 / 2024** Session 1 d'automne **PARCOURS / ÉTAPE : 4TMA903U** **Code UE : 4TTN901S, 4TTN901S** **Épreuve :** Structures algébriques 2 **Date :** 23/10/2023 **Heure :** 11h **Durée :** 1h30 Documents et équipements électroniques non autorisés Épreuve de M. Brinon	**Collège Sciences et technologies**

Questions de cours

(1) Soient p un nombre premier, G un p-groupe agissant sur un ensemble fini X. Montrer que $\#X \equiv \#X^G \mod p$, où X^G désigne l'ensemble des points fixes pour l'action.
(2) Montrer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$.
(1) Combien y a-t-il de n-cycles dans $\mathfrak{S}_n$?
(2) En déduire le nombre de sous-groupes engendrés par un n-cycle dans $\mathfrak{S}_n$.

Solution : (1) Il y a $(n-1)!$ cycles de longueur n dans $\mathfrak{S}_n$.
(2) Chacun de ces sous-groupes, isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ admet $\varphi(n)$ générateurs, *i.e.* $\varphi(n)$ cycles de longueur n : il y en a donc $\frac{(n-1)!}{\varphi(n)}$.

Exercice 2

Soit G un groupe *simple* d'ordre 400. On note e son élément neutre et pour p premier, n_p le nombre de p-Sylow de G.

(1) Factoriser 400 en produit de puissances de nombres premiers.
(2) Expliquer pourquoi on a nécessairement $n_5 = 16$.

On note $S_1, \dots, S_{16}$ les 5-Sylow de G.

(3) Dans cette question, on suppose que $i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \{e\}$.

(a) Dénombrer l'ensemble $E = \bigcup_{k=1}^{16} S_k \backslash \{e\}$.
(b) Si Σ est un 2-Sylow de G, montrer que $\Sigma \subset G \backslash E$.
(c) En déduire que $n_2 = 1$, puis une contradiction.

D'après la question précédente, on peut supposer, quitte à renuméroter, que le sous-groupe $H := S_1 \cap S_2$ n'est pas réduit à l'élément neutre. On note G' le sous-groupe de G engendré par S_1 et S_2.

(4) Quel est l'ordre de H ?
(5) Expliquer pourquoi H est distingué dans S_1 et dans S_2 [indication : penser à la question de cours]. En déduire que H est distingué dans G'.
(6) Quel est le nombre de 5-Sylow de G' ? En déduire que $G' = G$.
(7) Qu'en déduit-on ?

Solution : (1) On a $400 = 2^4 \times 5^2$.

(2) D'après les théorèmes de Sylow, on a $n_5 \mid 2^4$ et $n_5 \equiv 1 \mod 5$. Cela implique que $n_5 \in \{1, 16\}$. Si on avait $n_5 = 1$, l'unique 5-Sylow de G serait distingué contredisant la simplicité de G : on a nécessairement $n_5 = 16$.

(3) (a) Par hypothèse, on a $k \neq \ell \Rightarrow (S_k \backslash \{e\}) \cap (S_\ell \backslash \{e\}) = \varnothing$: la réunion $E = \bigcup_{k=1}^{16} (S_k \backslash \{e\})$ est disjointe. Comme $\# S_k = 5^2 = 25$ pour tout $k \in \{1, \ldots, 16\}$, cela implique que $\# E = 16 \times 15 = 400 - 16$.

(b) Les éléments de E sont non triviaux et d'ordre divisant 25, *i.e.* d'ordre 5 ou 25. D'après le théorème de Lagrange, on a donc $\Sigma \cap E = \varnothing$.

(c) Si Σ est un 2-Sylow, on a $\Sigma \subset G \backslash E$ d'après la question précédente. Comme $\#(G \backslash E) = 16 = \# \Sigma$ en vertu de la question (3) (a), cela implique que $\Sigma = G \backslash E$. Il en résulte que G a un unique 2-Sylow, contredisant sa simplicité.

(4) D'après le théorème de Lagrange, on a $\# H \mid \# S_1 = 25$. Par ailleurs, on a $S_1 \not\subset S_2$, donc $\{e\} \subsetneq H \subsetneq S_1$, ce qui implique que $\# H \notin \{1, 25\}$: on a nécessairement $\# H = 5$.

(5) On sait que si p est un nombre premier, tout groupe d'ordre p^2 est abélien (*cf* question de cours). Cela montre que les 5-Sylow de G, d'ordre 25, sont abéliens. Cela implique en particulier que H est distingué dans S_1 et dans S_2. Cela signifie que le normalisateur $\mathsf{N}_G(H)$ de H dans G contient les sous-groupes S_1 et S_2 : il contient le sous-groupe qu'ils engendrent, *i.e.* $G' \leqslant \mathsf{N}_G(H)$, ce qui signifie précisément que H est distingué dans G'.

(6) Notons n_5' le nombre de 5-Sylow de G' : on a $n_5' \equiv 1 \mod 5$ et $n_5' \mid \frac{\# G'}{25} \mid 16$. Cela implique $n_5' \in \{1, 16\}$. On n'a pas $n_5' = 1$ car S_1 et S_2 sont deux 5-Sylow distincts de G' : on a nécessairement $n_5' = 16$.

Il en résulte que $16 \mid \frac{\# G'}{25}$ *i.e.* $400 \mid \# G'$, et donc $G = G'$.

(7) Ce qui précède montre que H est distingué dans $G = G'$, de sorte que G n'est pas simple, ce qui est contradictoire. On a donc montré qu'un groupe d'ordre 400 n'est jamais simple.