université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2020 / 2021

Session 1 d'automne

PARCOURS / ÉTAPE : 4TMA903U

Code UE : 4TTN901S, 4TTN901S

Épreuve : Structures algébriques 2

Date : 18/12/2020 Heure : 14h30 Durée : 3h

Documents et équipements électroniques non autorisés

Épreuve de Mr Brinon

Collège Sciences et technologies

La qualité de la rédaction sera un facteur d'évaluation important.

Questions de cours

Soient A un anneau intègre et $\pi \in A$.

(1) Montrer que si π est premier, alors π est irréductible.
(2) Montrer que si A est factoriel, alors π irréductible implique π premier.
(3) Énoncer et démontrer le critère d'Eisenstein.
(4) Soient M/L et L/K des extensions finies. Montrer que M/K est finie et $[M:K] = [M:L][L:K]$.

Exercice 1

Montrer que l'anneau $\mathbf{R}[X,Y,Z]/\langle X^2+Y^2+Z^2\rangle$ est intègre.

Exercice 2

(1) Soient A un anneau factoriel, K son corps des fractions et $P(X) \in A[X]$ unitaire. Montrer que si $P(X) = P_1(X)P_2(X)$ avec $P_1, P_2 \in K[X]$ unitaires, alors $P_1, P_2 \in A[X]$.
(2) En déduire que $\mathbf{Z}[2\sqrt{2}] = \{a + 2\sqrt{2}b\,;\, a, b \in \mathbf{Z}\}$ n'est pas factoriel.

Exercice 3

Posons $A = \mathbf{Z}[i\sqrt{2}] = \{x + i\sqrt{2}y\,;\, x, y \in \mathbf{Z}\}$. C'est un sous-anneau de $\mathbf{C}$.

(1) Montrer soigneusement que A, muni du stathme défini par $N(x + yi\sqrt{2}) = x^2 + 2y^2$ est un anneau euclidien [on pourra illustrer la preuve par un dessin].
(2) Déterminer $A^\times$.
(3) Montrer que $i\sqrt{2}$ est irréductible dans A.

Soit $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $x^3 = y^2 + 2$.

(4) Soit $\pi \in A$ un élément irréductible divisant $y + i\sqrt{2}$ et $y - i\sqrt{2}$.
   (a) Montrer qu'on a $\pi = \pm i\sqrt{2}$.
   (b) En déduire que y est pair, et trouver une contradiction.
(5) En déduire $\mathrm{pgcd}(y + i\sqrt{2}, y - i\sqrt{2})$.
(6) Montrer que $y + i\sqrt{2}$ est un cube dans A.
(7) En déduire que les seules solutions de l'équation $x^3 = y^2 + 2$ sont $(3, \pm 5)$.

Exercice 4

Posons $K = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) \subset \mathbf{R}$.
(1) Que vaut $[K : \mathbf{Q}]$?
(2) Donner une base de K vu comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.
(3) En déduire que le polynôme minimal de $\alpha := \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sur $\mathbf{Q}$ n'est pas de degré 2.
(4) En déduire que $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ et calculer le polynôme minimal de α sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 5

Soient $P \in \mathbf{Q}[X]$ irréductible unitaire de degré d et $K \subset \mathbf{C}$ une extension de $\mathbf{Q}$ contenant une racine α de P. Supposons que K ne contient pas de racine cubique de α.
(1) Montrer que le polynôme $X^3 - \alpha$ est irréductible sur $\mathbf{Q}(\alpha)$.
(2) Soit $\beta \in \mathbf{C}$ une racine cubique de α. Calculer $[\mathbf{Q}(\beta) : \mathbf{Q}]$ en fonction de d, et en déduire que $P(X^3)$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 6

Quel est le cardinal du plus petit corps de caractéristique 7 dans lequel le polynôme $X^{18} + X^{17} + \cdots + X + 1$ a une racine ?