Feuille d'exercices n° 2

Idéaux premiers, maximaux

Dans ce qui suit les anneaux considérés sont commutatifs.

Exercice 1.

1) Montrer que dans $\mathbb{Z}[X]$, l'idéal $\langle X \rangle$ est premier mais non maximal.

2) Soit A un anneau principal. Montrer que tout idéal premier non nul de A est maximal et retrouver le fait (vu en cours) que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

Exercice 2. Soit A un anneau non nul dans lequel tout idéal propre ($\neq A$) est premier. Montrer que A est intègre puis que A est un corps.

Exercice 3. Cet exercice complète l'exercice 8 de la feuille 1. Soient un morphisme d'anneaux $f : A \to B$, I un idéal de A et J un idéal de B.

1) Rappeler pourquoi si J est premier, $f^{-1}(J)$ l'est aussi.

2) Montrer que si f est surjectif et si J est maximal, $f^{-1}(J)$ est un idéal maximal de A.

3) Est-ce encore vrai si on supprime l'hypothèse de surjectivité ?

4) Montrer que si f est surjectif , I maximal et $f(I) \neq B$, $f(I)$ est alors maximal.

5) Montrer, toujours en supposant f surjectif et $f(I) \neq B$, que si I est premier $f(I)$ ne l'est pas forcément.

Exercice 4. Dans cet exercice on admettra le théorème de Krull qui dit que dans un anneau A tout idéal propre $I \subsetneq A$ est contenu dans un idéal maximal. On appelle anneau local un anneau qui possède un unique idéal maximal.

1) Montrer que si A est local, alors son unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ est l'ensemble des éléments non inversibles de A, i.e. $\mathfrak{m} = A \setminus A^{\times}$.

2) Soit A un anneau non nul. Montrer que A est local si et seulement si pour tout $x \in A$, alors x est inversible ou $1 - x$ est inversible.

3) Soit A un anneau non nul. Montrer que A est local si et seulement si la somme de deux éléments non inversibles de A est non inversible.

Exercice 5. Soit K un corps.

1) Soit $\alpha \in K$. Montrer, en considérant $\phi : K[X] \to K$ qui à $P(X)$ associe $P(\alpha)$, que $I = \langle X - \alpha \rangle$ est maximal dans $K[X]$.

2) Supposons que K soit algébriquement clos, i.e. tel que tout polynôme de $K[X]$ de degré $\geqslant 1$ admette au moins une racine dans K. Montrer que si I est un idéal maximal de $K[X]$ il existe $\alpha \in K$ unique tel que $I = \langle X - \alpha \rangle$.

3) Soit $n \geqslant 2$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$. Montrer que $I = \langle X_1 - \alpha_1, X_2 - \alpha_2, \dots, X_n - \alpha_n \rangle$ est un idéal maximal de $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$. On peut aussi généraliser la question 2). Il s'agit du Nullstellensatz (théorème des zéros) faible de Hilbert. Nous ne le ferons pas ici.

Exercice 6. Soit A un anneau (non nul). On considère le morphisme d'anneaux $f : A[X, Y, Z] \to A[T]$ vérifiant $f(a) = a$ pour tout $a \in A$, $f(X) = T$, $f(Y) = T^2$ et $f(Z) = T^3$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \langle Y - X^2, Z - XY \rangle$.

2) Établir que $A[X, Y, Z]/\langle Y - X^2, Z - XY \rangle \simeq A[T]$.

3) À quelle condition $\langle Y - X^2, Z - XY \rangle$ est-il premier ?

4) Trouver un idéal maximal contenant strictement $\langle Y - X^2, Z - XY \rangle$ quand $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit A un anneau (non nul).

1) Montrer que pour tout $P(X, Y) \in A[X, Y]$ il existe un unique couple $(Q(X, Y), R(X)) \in A[X, Y] \times A[X]$ tels que $P(X, Y) = (Y - X)Q(X, Y) + R(X)$.

2) Montrer que l'idéal $I = \langle Y - X \rangle$ est premier si et seulement si A est intègre. Peut-il être maximal ?

3) On suppose que A est un corps. Montrer que l'anneau $A[X, Y]/I$ est principal. Exhiber un idéal maximal de $A[X, Y]$ contenant I.