Feuille d'exercices n° 4 bis

Irréductibilité (2)

Exercice 1.

1) Soient A un anneau commutatif, I et J deux idéaux de A. On note π la projection canonique de A sur A/I. Rappeler pourquoi les anneaux $\dfrac{A}{I+J}$ et $\dfrac{A/I}{\pi(J)}$ sont isomorphes.

2) Soient K un corps et $P(X)$ un polynôme irréductible de $K[X]$. Prouver que $K[X]/\langle P(X)\rangle$ est un corps.

3) Soient q un entier naturel premier et $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme dont la réduction modulo q est irréductible dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}[X]$. Expliquer pourquoi $\mathbb{Z}[X]/\langle q\rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}[X]$ et montrer à l'aide des questions précédentes que l'idéal $\langle q, P(X)\rangle$ est maximal dans $\mathbb{Z}[X]$.

4) Montrer que l'idéal $\langle X^3+8X+15, X^4+X^3+8X^2+23X+22\rangle$ est maximal dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2.

1) En le réduisant modulo 2 et 3 montrer que X^4+5X^2-8X+9 est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$.

2) En le réduisant modulo 2 montrer que $X^5+3X^4-X^2+1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 3.

Soient des entiers $n \geqslant 2$ et p premier > 2. On pose $P(X) = X^n + X + p$.

1) Soit α une racine de $P(X)$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $|\alpha| > 1$.

2) En déduire que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 4.

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ deux à deux distincts. Montrer que le polynôme

$$P(X) = (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n) - 1$$

est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$.