Feuille d'exercices n° 6

Extensions de corps (2)

Exercice 1.

1) Rappeler pourquoi $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\,;\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ est factoriel.

2) Montrer que 3 est un élément irréductible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

3) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de $X^4 + 3X + 3$. Montrer que $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \alpha) : \mathbb{Q}] = 8$.

Exercice 2. Soit $P(X) = X^4 - 2X^2 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$.

1) Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

2) Établir que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ est un corps de rupture sur $\mathbb{Q}$ de $P(X)$.

Exercice 3. Soit $j = e^{2i\pi/3} \in \mathbb{C}$.

1) Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

2) Prouver que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}j)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}j^2)$ sont isomorphes et deux à deux distincts.

3) Établir que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$ est le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de $X^3 - 2$ inclus dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4. Soit $P(X) = X^4 - 4X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

1) Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

2) Prouver que $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ est le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de $P(X)$ inclus dans $\mathbb{C}$.

Exercice 5.

1) Soit α le réel $\sqrt{1 + \sqrt{7}}$. Trouver le polynôme minimal $P(X)$ de α sur $\mathbb{Q}$. Que vaut $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$?

2) Montrer que $K = \mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{6})$ est le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de $P(X)$ inclus dans $\mathbb{C}$.

3) Déterminer le degré et une base de K sur $\mathbb{Q}$.

4) Soit $\beta = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$. Déterminer le corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ du polynôme minimal de β sur $\mathbb{Q}$ inclus dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6. Soient une extension finie L/K et un polynôme $P(X) \in K[X]$ de degré n, irréductible sur K. Montrer que si $[L : K]$ et n sont premiers entre eux, $P(X)$ est irréductible sur L. *Indication* : considérer $Q(X)$ un facteur irréductible de $P(X)$ dans $L[X]$ et $L' = L(\alpha)$ un corps de rupture sur L de $Q(X)$ où α est une racine de $Q(X)$, puis observer $[L' : K]$ en utilisant $K(\alpha)$.

Exercice 7 (Théorème de l'élément primitif)**.** Soit K un corps de caractéristique nulle.

1) Soient $P(X) \in K[X]$ irréductible et L un corps de décomposition de $P(X)$. Montrer que $P(X)$ n'a que des racines simples dans L.

2) Soit L/K une extension finie. On suppose que $L = K(x, y)$ et on note $P(X)$ et $Q(X)$ les polynômes minimaux de x et y sur K, de degrés respectifs m et n. Soit M un corps de décomposition de $P(X)Q(X)$ sur K contenant x et y. Dans M on a

$$P(X) = (X - x)\prod_{i=2}^{m}(X - x_i) \quad \text{et} \quad Q(X) = (X - y)\prod_{j=2}^{n}(X - y_j).$$

Montrer qu'il existe $t \in K \setminus \{0\}$ tel que pour tout $i \geqslant 2$ et tout $j \geqslant 2$, $z = x + ty \neq x_i + ty_j$. On pose alors $N = K(z)$ et $R(X) = P(z - tX)$.

3) Montrer que $R(X) \in N[X]$ et que $\operatorname{pgcd}(R(X), Q(X)) = X - y$.

4) En déduire que $y \in N$ et que $L = N$.

5) Montrer par récurrence que toute extension finie de K est simple (ou monogène).

6) En s'inspirant de la méthode précédemment utilisée trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i) = \mathbb{Q}(\alpha)$.