Université de Bordeaux

Master Agrégation
Révisions d'algèbre bilinéaire

Dans toute la suite K désigne un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

Exercice 1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E. Montrer qu'il existe une base de E orthogonale pour q.

Exercice 2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension 2 et q une forme quadratique non dégénérée sur E. On suppose qu'il existe $x \in E\setminus\{0\}$ isotrope pour q, *i.e.* tel que $q(x) = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathfrak{B}$ de E telle que la matrice de q dans $\mathfrak{B}$ soit $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 3. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, q une forme quadratique positive sur E et $x \in E$. Montrer que $x \in E^{\perp}$ si et seulement si $q(x) = 0$.

Exercice 4. Posons $E = \mathsf{M}_2(\mathbf{R})$ et soit $q\colon E \to \mathbf{R}$ définie par

$$q(A) = -4\det(A) + \mathsf{Tr}(A)^2.$$

(1) Montrer que q est une forme quadratique sur E. Expliciter la forme bilinéaire associée.
(2) Déterminer le rang et la signature de q.
(3) Démontrer qu'un élément A de E est isotrope (pour q) si et seulement si A possède une valeur propre double.

Exercice 5. Soit A la matrice symétrique réelle définie par $A = (\min(i,j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
(1) Montrer que A est définie positive en donnant une décomposition de Gauss de la forme quadratique associée.
(2) Calculer le déterminant de A.

Exercice 6. Soit $E = \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ muni de sa base canonique $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On définit la forme bilinéaire φ sur E par

$$\varphi(M,N) = \mathsf{Tr}(MN).$$

On note $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de E.
(1) Montrer que φ est une forme symétrique non dégénérée.
(2) Montrer que $E = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
(3) Montrer que la restriction de φ à $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) est définie positive (resp. définie négative). Quel est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n$ pour φ ?

Exercice 7. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n. On note $q(x) = \langle u(x) \mid x\rangle$ la forme quadratique associée à u. Montrer que $\mathsf{Tr}(u) = 0$ si et seulement s'il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs isotropes pour q (*i.e.* telle que $q(e_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$).

Exercice 8. Construire une matrice $A \in \mathsf{M}_2(\mathbf{C})$ symétrique et non diagonalisable.

Exercice 9. Soit E un espace euclidien. On considère une décomposition de E en somme directe $E = F \oplus G$ et on note p la projection sur F parallèlement à G. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) p est la projection orthogonale sur F (*i.e.* $G = F^{\perp}$) ;

(ii) p est symétrique, c'est-à-dire $\langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$;

(iii) pour tout x de E, on a $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 10. Soit $S \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique.

(1) Montrer que $S = 0$ si et seulement si $\langle S\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

(2) Montrer que les valeurs propres de S sont positives si et seulement si $\langle S\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Dans ce cas, on dira que S est positive.

(3) Si $S \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ est positive et $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, montrer que $S\mathbf{x} = 0$ si et seulement si $\langle S\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle = 0$.

(4) Soit $A \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que, pour la norme induite par la norme euclidienne, $\|A\| \leqslant 1$. Montrer que $F = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \,;\, \|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 11. Soit $A \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique. On note α la plus grande valeur propre de A.

(1) Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, montrer que $\langle A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle \leqslant \alpha \|\mathbf{x}\|^2$. Étudier le cas d'égalité.

On suppose, dans toute la suite de l'exercice, que les coefficients de A sont strictement positifs.

(2) Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. En utilisant $\mathbf{x}_+ := (|x_1|, \ldots, |x_n|)$, montrer que $|\langle A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \rangle| \leqslant \alpha \|\mathbf{x}\|^2$.

(3) Montrer que $\alpha > 0$ et que pour toute valeur propre λ de A, on a $|\lambda| \leqslant \alpha$.

On note E_α le sous-espace propre associé à α.

(4) Soit $\mathbf{x} \in E_\alpha$. Montrer que $\mathbf{x}_+ \in E_\alpha$.

(5) Soit $\mathbf{x} \in E_\alpha$. On suppose $\mathbf{x}$ non nul à composantes positives. Montrer que les composantes de $\mathbf{x}$ sont strictement positives.

(6) Déduire des questions précédentes que E_α est de dimension 1.

Exercice 12. Soit E un espace euclidien. Pour $f \in \mathsf{End}_{\mathbf{R}}(E)$, on notera f^* l'adjoint de f, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de E vérifiant $(\forall x, y \in E)\ \langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f^*(y) \rangle$. Soient $f, g \in \mathsf{End}_{\mathbf{R}}(E)$. On souhaite montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f^* \circ f = g^* \circ g$;

(ii) $(\forall x \in E)\ \|f(x)\| = \|g(x)\|$;

(iii) $(\forall x, y \in E)\ \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle g(x) \mid g(y) \rangle$;

(iv) $(\exists u \in \mathsf{O}(E))\ g = u \circ f$.

(1) Montrer que les propositions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.

(2) Montrer que (iv) implique (i).

(3) On suppose f bijective. Montrer que (i) implique (iv).

(4) On ne suppose plus que f est bijective. On souhaite montrer que (i) implique (iv). On suppose donc que (i) est vraie.

(a) Montrer que $\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Ker}(g)$.

(b) Montrer que g induit un isomorphisme g_1 de $\mathsf{Ker}(g)^{\perp}$ sur $\mathsf{Im}(g)$ et que f induit un isomorphisme f_1 de $\mathsf{Ker}(g)^{\perp}$ sur $\mathsf{Im}(f)$.

(c) On pose $r_1 = g_1 \circ f_1^{-1}$. Montrer que pour tout $x \in \mathsf{Im}(f)$, on a $\|r_1(x)\| = \|x\|$.

(d) Montrer qu'il existe une application linéaire $r_2 \colon \mathsf{Im}(f)^{\perp} \to \mathsf{Im}(g)^{\perp}$ telle que pour tout $y \in \mathsf{Im}(f)^{\perp}$, on ait $\|r_2(y)\| = \|y\|$.

(e) On définit un endomorphisme r de E par $r_{|\mathsf{Im}(f)} = r_1$ et $r_{|\mathsf{Im}(f)^{\perp}} = r_2$. Montrer que $r \in \mathsf{O}(E)$ et conclure.

Exercice 13. Soit $(E, \langle . \mid . \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. Pour $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de E, on pose $G(x_1, \ldots, x_p) := \det(\langle x_i \mid x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ (déterminant de Gram).

(1) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ (resp. $(f_1, \ldots, f_p)$) une famille de E, $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathsf{M}_p(\mathbf{R})$ tel que $e_j = m_{1,j} f_1 + \ldots + m_{p,j} f_p$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$. Montrer que

$$(\langle e_i \mid e_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} = {}^t M (\langle f_i \mid f_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} M.$$

(2) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de E que l'on suppose libre. En considérant une base orthonormée du sous-espace vectoriel $V = \mathsf{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ de $(E, \langle . \mid . \rangle)$, déduire de la question précédente que $G(e_1, \ldots, e_p) > 0$.

(3) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de E que l'on suppose liée. Montrer que $G(e_1, \ldots, e_p) = 0$.

(4) (a) L'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Montrer par récurrence que si $(e_1, \ldots, e_r)$ une famille libre de E, alors il existe une unique famille orthonormale $(g_1, \ldots, g_r)$ de E telle que $e_1 = a_{1,1} g_1$, $e_2 = a_{1,2} g_1 + a_{2,2} g_2$, $e_r = a_{1,r} g_1 + a_{2,r} g_2 + \cdots + a_{r,r} g_r$ avec $a_{i,i} > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$.

(b) En déduire que pour toute famille $(e_1, \ldots, e_p)$ on a $\sqrt{G(e_1, \ldots, e_p)} \leqslant \prod_{i=1}^{p} \|e_i\|$ (inégalité d'Hadamard).

(c) Supposons $(e_1, \ldots, e_p)$ libre. Montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthogonale.

(5) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E et $V := \mathsf{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Montrer que si $x \in E$, on a $d(x, V)^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_p, x)}{G(e_1, \ldots, e_p)}$ où $d(x, V)$ désigne la distance de x à V.

Exercice 14. On munit $\mathbf{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on identifie $\mathsf{End}(\mathbf{R}^n)$ et $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ en considérant la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

(1) Soit $G \subset \mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$ un sous-groupe fini. Montrer qu'il existe $P \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que $P^{-1} G P \subset \mathsf{O}_n(\mathbf{R})$ (utiliser le produit scalaire défini par $\varphi(x, y) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \langle g(x) \mid g(y) \rangle$.)

(2) Soit $G \subset \mathsf{SO}_2(\mathbf{R})$ un sous-groupe d'ordre n. Montrer que $G = \langle R(\frac{2\pi}{n}) \rangle$ où on a posé $R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbf{R})$.

(3) Quels sont, à isomorphisme près, les sous-groupe finis de $\mathsf{SL}_2(\mathbf{R})$ et de $\mathsf{GL}_2(\mathbf{R})$?

(4) Soit $G \subset \mathsf{SL}_2(\mathbf{Z})$ un sous-groupe d'ordre n.

(a) Montrer que G est cyclique.

(b) Montrer que $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ (penser à la trace).

(c) Exhiber un sous-groupe de $\mathsf{SL}_2(\mathbf{Z})$ d'ordre 4 (resp. 6).

(d) Exhiber une infinité de sous-groupes de $\mathsf{SL}_2(\mathbf{Z})$ d'ordre 6.

Exercice 15. Soient $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien et X une partie de $\mathscr{E}$. On note $\mathsf{Isom}(F)$ (resp. $\mathsf{Isom}^+(F)$, $\mathsf{Isom}^-(F)$) l'ensemble des isométries affines (resp. positives, négatives) σ de $\mathscr{E}$ telles que $\sigma(F) = F$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations de E. On suppose à partir de maintenant que $\mathcal{T} \cap \mathsf{Isom}(F)$ est égal à $\mathbf{Z}\, t_{\vec{u}}$, c'est-à-dire que F admet un vecteur de translation « minimal » $\vec{u}$. On dira que F est une frise. Par exemple :

···@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@···

···»«»«»«»«»«»«»«»«»«»«»«»«»«»«»«»«···

sont des morceaux de frises.

(1) Montrer que $\mathsf{Isom}(F)$ et $\mathsf{Isom}^+(F)$ sont des sous-groupes de $\mathsf{Isom}(E)$.

(2) Soit $r \in \mathsf{Isom}^+(F)$. En étudiant $r \circ t_{\vec{u}} \circ r^{-1}$, montrer que $\vec{u}$ est vecteur propre de $\vec{r}$. En déduire $\vec{r} = \pm \mathsf{Id}_E$ (où E est la direction de $\mathscr{E}$). Quelle est la nature de r ?

(3) On suppose que $\mathsf{Isom}^+(F)$ contient au moins une symétrie de centre O, notée r.

(a) Lorsque $n \in \mathbf{Z}$, que vaut $t_{n\vec{u}} \circ r$? En déduire que $\mathsf{Isom}^+(F)$ contient une infinité de symétries centrales.

(b) Soit $r' \in \mathsf{Isom}^+(F)$ une autre symétrie, de centre O'. Montrer que $2\overrightarrow{OO'} \in \mathbf{Z}\,\vec{u}$. En déduire que r' est l'une des symétries centrales précédentes.

(4) Soit $s \in \mathsf{Isom}^-(F)$. En étudiant $s \circ t_{\vec{u}} \circ s^{-1}$, montrer que l'axe de s est parallèle ou orthogonal à $\vec{u}$.

(a) Dans le cas où l'axe est orthogonal à $\vec{u}$, montrer que le vecteur de glissement de s est nul. Quelles sont les symétries d'axe orthogonal à $\vec{u}$ de $\mathsf{Isom}^-(F)$?

(b) On se place dans le cas d'axe parallèle à $\vec{u}$. On note $\vec{v}$ le vecteur de glissement de s. Montrer que $2\vec{v} \in \mathbf{Z}\,\vec{u}$, et que l'axe est indépendant de s, on le notera D.

(i) Si $\vec{v} \in \mathbf{Z}\,\vec{u}$, montrer qu'il existe une symétrie d'axe D dans $\mathsf{Isom}^-(F)$. Quelles sont les autres symétries glissées d'axe D ?

(ii) Si $\vec{v} \notin \mathbf{Z}\,\vec{u}$, montrer qu'il n'y a pas de symétrie d'axe D mais seulement des symétries glissées d'axe D dans $\mathsf{Isom}^-(F)$.

(5) En remarquant que si $\mathsf{Isom}(F)$ contient deux des trois types de symétries, il contient forcément le troisième, lister tous les groupes possibles (il y en a sept) et dessiner une frise correspondant à chacun d'eux.

Exercice 16. Soit $A \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique. On note q la forme quadratique qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et u l'endomorphisme ayant également pour matrice A dans cette même base.

(1) On désigne par S la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ (muni de la structure euclidienne usuelle). Montrer qu'il existe $\mathbf{x}_0 \in S$ tel que $q(\mathbf{x}_0) \leqslant q(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in S$.

(2) Montrer que $\alpha := q(\mathbf{x}_0)$ est la plus petite valeur propre de A et que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ non nul, on a $\lambda_{\min} \leqslant \frac{\langle u(\mathbf{x}) | \mathbf{x}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} \leqslant \lambda_{\max}$ où $\lambda_{\min}$ (resp. $\lambda_{\max}$) la valeur propre minimale (resp. maximale) de A.

(3) Montrer que $\left\{\frac{\langle u(\mathbf{x}) | \mathbf{x}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2}\right\}_{\mathbf{x}\in E\setminus\{0\}} = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.

(4) *Application :* On considère la norme N sur $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ définie par

$$N(M) = \sup_{X \neq 0} \frac{\|MX\|}{\|X\|}.$$

Trouver une relation entre $N(M)$ et la plus grande valeur propre de ${}^tMM$.

Exercice 17. Soit E un espace euclidien (c'est-à-dire un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme quadratique définie positive). On notera $\langle x \mid y\rangle$ le produit scalaire de x et y. Soient a un vecteur unitaire de E et $\lambda \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$. On pose $u(x) = x + \lambda\langle x \mid a\rangle a$.

(1) Montrer que u est un automorphisme de E. Déterminer u^{-1}.

(2) Montrer que u est symétrique. Pour quelles valeurs de λ est-il unitaire ?

(3) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de u.

Exercice 18. On définit la forme bilinéaire symétrique Φ sur $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$\Phi(M, N) = \mathsf{Tr}({}^tMN).$$

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique positive.

(1) Démontrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathsf{M}_n(\mathbf{R})$. On note N la norme associée.

(2) Démontrer qu'il existe P telle que $A = {}^tPP$. En déduire que pour tout $U \in \mathsf{O}_n(\mathbf{R})$, on a $\mathsf{Tr}(AU) \leqslant \mathsf{Tr}(A)$.

(3) Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

(4) Démontrer que $N(U^{-1}MU) = N(M)$ pour toutes matrices $U \in \mathsf{O}_n(\mathbf{R})$ et $M \in \mathsf{M}_n(\mathbf{R})$.

(5) Montrer que $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum\limits_{\lambda\in\mathsf{Sp}(A)} \lambda^2$.