université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015 / 2016** SESSION 1 D'AUTOMNE **PARCOURS / ÉTAPE : MSMA7103** **Code UE : N1MA7102** **Épreuve :** Modules, espaces quadratiques **Date :** 02/11/2015 **Heure :** 14 h **Durée :** 3h00 Documents : non autorisés Épreuve de Mr Brinon	**Collège Sciences et technologies**

Les documents et les calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.

Exercice 1

Donner les diviseurs élémentaires des groupes abéliens $(\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/11\,\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2015\,\mathbf{Z})$ et $(\mathbf{Z}/2015\,\mathbf{Z})^{\times}$.

Exercice 2

(1) Trouver une base adaptée pour les groupes abéliens suivants :
 (i) $L_1 := \mathbf{Z}\,v_1 + \mathbf{Z}\,v_2 + \mathbf{Z}\,v_3 \subset \mathbf{Z}^3$ avec $v_1 = (-2,1,1)$, $v_2 = (1,-2,1)$ et $v_3 = (1,1,-2)$;
 (ii) $L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{Z}^3,\ x \equiv y \mod 2\,\mathbf{Z},\ y \equiv z \mod 3\,\mathbf{Z}\} \subset \mathbf{Z}^3$.

(2) Donner la structure du groupe abélien de type fini $G = \mathbf{Z}^3/(\mathbf{Z}(4,8,10) + \mathbf{Z}(6,2,0))$.

(3) Construire une matrice $A \in \mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ dont la première ligne est $(6,11,5)$.

Exercice 3

Soit A un anneau. Un A-module P est dit *projectif* si pour toute application A-linéaire surjective $\pi\colon M \to N$ et toute application A-linéaire $f\colon P \to N$, il existe une application A-linéaire $\widehat{f}\colon P \to M$ tel que $f = \pi \circ \widehat{f}$, *i.e.* telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\widehat{f}"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "\pi"] & N \end{tikzcd}$$

commute.

(1) Montrer qu'un A-module libre de rang fini est projectif.

(2) Montrer que si $P \simeq M/N$ est projectif, alors P est isomorphe à un facteur direct de M. En déduire qu'un A-module de type fini est projectif si et seulement s'il est facteur direct d'un A-module libre de rang fini.

(3) Soit $e \in A$ un élément idempotent (*i.e.* tel que $e^2 = e$). Montrer que Ae et A/Ae sont projectifs.

(4) Donner un exemple de A-module projectif non libre.

(5) Facultatif : montrer qu'un A-module P monogène (*i.e.* engendré par un seul élément) est projectif si et seulement si $P \simeq Ae$ avec $e \in A$ idempotent.

Exercice 4

Soient K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathsf{End}_K(V)$.

(1) Supposons que $f^3 = 0$. Décrire la matrice réduite de Jordan de f en fonction de $r = \mathsf{rg}(f)$ et $s = \mathsf{rg}(f^2)$.

(2) Supposons $n = 7$, que $\chi_f(X) = (X+1)^2(X-1)^5$ et que $\mu_f(X) = (X+1)(X-1)^3$. Quelles sont les matrices réduites de Jordan possibles pour f ?

Exercice 5

Soient V un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathsf{End}_{\mathbf{Q}}(V)$. On suppose que les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $u^5 = \mathsf{Id}_V$;

(ii) pour tout vecteur $v \in V$, si $u(v) = v$, alors $v = 0$.

Montrer que la dimension de V est divisible par 4.

Donner un contre-exemple lorsque le corps $\mathbf{Q}$ est remplacé par $\mathbf{C}$, puis par $\mathbf{R}$.

Exercice 6

Soient K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathsf{End}_K(V)$. On note $V^\vee = \mathsf{Hom}_K(V, K)$ le dual de V. Rappelons que la *transposée* de f est l'application K-linéaire

$$\begin{aligned} f^\vee : V^\vee &\to V^\vee \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

(1) Supposons f cyclique : soit $v \in V$ tel que $\mathfrak{B} = (v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit une base de V. Rappeler la forme de la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}$, ainsi que les invariants de similitude de f.

(2) Soit $\mathfrak{B}^*$ la base duale de $\mathfrak{B}$: quelle est la matrice de $f^\vee$ dans la base $\mathfrak{B}^*$? En déduire les invariants de similitude de $f^\vee$, puis que (V, f) et $(V^\vee, f^\vee)$ sont semblables dans ce cas.

(3) En déduire que (V, f) et $(V^\vee, f^\vee)$ sont semblables dans le cas général.