université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015 / 2016** Session 1 d'automne **PARCOURS / ÉTAPE : MSMA7103** **Code UE : N1MA7102** **Épreuve :** Modules, espaces quadratiques **Date :** 3/11/2016 **Heure :** 14h **Durée :** 2h30 Documents : non autorisés Épreuve de Mr Brinon	**Collège Sciences et technologies**

Les documents et les calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.

Questions de cours

Soient L/K une extension de corps et $M_1, M_2 \in \mathsf{M}_n(K)$ deux matrices. On suppose que M_1 et M_2 sont semblables dans $\mathsf{M}_n(L)$ (*i.e.* $(\exists P \in \mathsf{GL}_n(L)) P^{-1}M_1P = M_2$). Expliquer pourquoi elles sont déjà semblables dans $\mathsf{M}_n(K)$.

Exercice 1

Donner les facteurs invariants des groupes abéliens $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2016\mathbf{Z})$ et $(\mathbf{Z}/2016\mathbf{Z})^\times$ (on rappelle que si p est premier et $r \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $(\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z})^\times \simeq \mathbf{Z}/(p-1)p^{r-1}\mathbf{Z}$ si $p \neq 2$, et $(\mathbf{Z}/2^r\mathbf{Z})^\times \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/p^{r-2}\mathbf{Z})$ si $r \geqslant 3$).

Exercice 2

(1) Trouver une base adaptée pour les groupes abéliens suivants :
(i) $L_1 := \mathbf{Z}v_1 + \mathbf{Z}v_2 + \mathbf{Z}v_3 \subset \mathbf{Z}^2$ avec $v_1 = (5,4)$, $v_2 = (7,8)$ et $v_3 = (3,6)$;
(ii) $L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{Z}^3,\ 3x + 5y + 7z = 0\} \subset \mathbf{Z}^3$.
(2) Construire une matrice $A \in \mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ dont la première ligne est $(6, 10, 15)$.

Exercice 3

Soient K un corps commutatif, V un K-espace vectoriel de dimension finie et $A = \mathsf{End}_K(V)$. Si $W \subset V$ un sous-espace, on pose $I_W = \{f \in A,\ f(W) = 0\}$.

(1) Montrer que I_W est un idéal à gauche de A, et que tout idéal à gauche de A est de la forme I_W (indication : si $I \subset A$ est un idéal, on posera $W = \bigcap_{f \in I} \mathsf{Ker}(f)$ et on montrera que I contient un projecteur de noyau W).

(2) Montrer que I_W est un A-module projectif (c'est-à-dire facteur direct d'un A-module libre).

(3) Montrer que si $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$, le A-module I_W n'est pas libre.

Exercice 4

Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathsf{M}_3(\mathbf{Q})$ telle que $A^8 = \mathsf{I}_3$ et $A^4 \neq \mathsf{I}_3$.

Exercice 5

Soient K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathsf{End}_K(V)$. On note $K[f]$ l'image dans $\mathsf{End}_K(V)$ du morphisme $K[X] \to \mathsf{End}_K(V)$; $P \mapsto P(f)$ et $\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathsf{End}_K(V),\ f \circ g = g \circ f\}$ le commutant de f.

(1) Supposons que f cyclique. Montrer que $\mathscr{C}(f) = K[f]$. Que vaut $\dim_K(\mathscr{C}(f))$?

(2) Réciproquement, supposons $\mathscr{C}(f) = K[f]$. En utilisant la décomposition de Frobenius (correspondant aux facteurs invariants du $K[X]$-module associé), montrer que f est cyclique.

(3) Montrer qu'on a toujours $\dim_K(\mathscr{C}(f)) \geqslant n$.

(4) Cas d'égalité dans (3) ?