université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017 / 2018** SESSION 1 D'AUTOMNE **PARCOURS / ÉTAPE : MSMA7103** **Code UE : N1MA7102** **Épreuve :** Modules, espaces quadratiques **Date :** 6/11/2017 **Heure :** 8h **Durée :** 2h Documents : non autorisés Épreuve de Mr Brinon	**Collège Sciences et technologies**

Les documents et les calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.
Dans tout l'énoncé, les anneaux sont supposés unitaires, les corps commutatifs, et les représentations complexes de degré fini.

Exercice 1

(1) Trouver une base adaptée pour le sous-groupe $L \subset \mathbf{Z}^3$ engendré par

$$\{(-4,4,2),(16,-4,-8),(8,4,2)\}.$$

(2) Construire une matrice $A \in \mathsf{SL}_3(\mathbf{Z})$ dont la première ligne est $(6,11,17)$.

Exercice 2

Donner les invariants de similitude de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&2&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&2&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2
\end{pmatrix}$$

Exercice 3

Posons $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$. Soit G un groupe dont la table des caractères commence par les deux lignes suivantes :

G	1	3	3	7	7
χ_1	1	1	1	j	$\overline{j}$
χ_2	3	α	$\overline{\alpha}$	0	0

(la première ligne contient les cardinaux des classes de conjugaison).

(1) Combien y a-t-il de caractères irréductibles ?
(2) Compléter cette table.
(3) Déterminer le groupe G par générateurs et relations.

Exercice 4

Soient G un groupe fini, $\mathsf{Z}(G)$ son centre, et (V, ρ) une représentation.

(1) Supposons V irréductible. Montrer que pour tout $z \in \mathsf{Z}(G)$, $\rho(z)$ est une homothétie (indication : utiliser le lemme de Schur).

(2) On suppose désormais $\mathsf{Z}(G) = \{e\}$ et $\rho\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ injective. Soit H un sous-groupe de G. On note $\rho_{|H}$ la restriction de ρ à H. Montrer que si $\mathsf{Z}(H) \neq \{e\}$, alors $(V, \rho_{|H})$ est réductible.

Exercice 5

Soient A un anneau commutatif unitaire, M un A-module noethérien et $f\colon M \to M$ une application A-linéaire.

(1) On suppose f surjective. Montrer que c'est un isomorphisme (indication : considérer les sous-modules $K_n = \mathsf{Ker}(f^n)$).

(2) Si f est supposée injective, est-ce automatiquement un isomorphisme ?

On suppose désormais que $M = A^n$ et on note $\Lambda \in \mathsf{M}_n(A)$ la matrice de f dans la base canonique.

(3) Montrer que f est surjective si et seulement si $\det(\Lambda) \in A^\times$.

(4) Montrer que si $\det(\Lambda)$ n'est pas diviseur de zéro dans A, alors f est injective.

(5) (Difficile) Montrer que réciproquement, si $\det(\Lambda)$ est diviseur de zéro dans A, alors f n'est pas injective (indication : soient $a \in A\backslash\{0\}$ tel que $a\det(\Lambda) = 0$ et $r < n$ le plus grand entier tel qu'il existe une matrice $N \in \mathsf{M}_r(A)$ extraite de Λ telle que $a\det(N) \neq 0$, construire $V \in A^n\backslash\{0\}$ tel que $\Lambda V = 0$ à partir d'une telle matrice N).

On suppose désormais que f est injective.

(6) Lorsque $A = \mathbf{Z}$, montrer que $\#A^n/\mathsf{Im}(f) = |\det(\Lambda)|$.

(7) Soient K un corps et $A = K[X]$, montrer que $\dim_K(A^n/\mathsf{Im}(f)) = \deg(\det(\Lambda))$.