université de BORDEAUX	**ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015 / 2016** Session 1 d'automne **PARCOURS / ÉTAPE : MSMA7103** **Code UE : N1MA7102** **Épreuve :** Modules, espaces quadratiques **Date :** 17/12/2015 **Heure :** 14 h **Durée :** 4h00 Documents : non autorisés Épreuve de Mr Brinon	**Collège Sciences et technologies**

Les documents et les calculatrices sont interdits.
La qualité de la rédaction sera un facteur d'appréciation important.

Dans tout l'éconcé, « représentation » signifie représentation complexe de dimension finie.

Exercice 1

On s'intéresse aux représentations du groupe $\mathfrak{S}_4$.

(1) Donner les classes de conjugaison du groupe $\mathfrak{S}_4$ (on précisera leurs cardinaux respectifs).
(2) Combien le groupe $\mathfrak{S}_4$ a-t-il de représentations irréductibles ?
(3) Donner deux représentations de dimension 1.
(4) Décomposer la représentation de permutation associée à l'action naturelle de $\mathfrak{S}_4$ sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.
(5) En déduire deux représentations irréductibles de dimension 3 non-isomorphes (indication : utiliser la question (3)).
(6) Dresser la table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_4$.
(7) Décrire « la » représentation irréductible de dimension 2 de $\mathfrak{S}_4$ (indication : construire un morphisme surjectif $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$).
(8) Parmi les représentations irréductibles, quelles sont celles dont la restriction à $\mathfrak{A}_4$ est encore irréductible ?

Exercice 2

Compléter la table de caractères suivante :

Classe de conjugaison Cardinal	$g_1 = 1$ 1	g_2 6	g_3 14	g_4 21
χ_0				
χ_1				
χ_2				
χ_3	6	-1		

On rappelle que si G est un groupe, $\mathsf{Hom}_{\mathrm{gr}}(G, \mathbf{C}^\times)$ est un groupe.

Exercice 3

Soit K un corps de caractéristique différente de 2. Pour $X \in \mathsf{M}_2(K)$, on pose

$$\delta(X) = -\det(X)$$

(1) Montrer que δ est une forme quadratique sur $\mathsf{M}_2(K)$ et expliciter sa forme polaire.
(2) Donner une base orthogonale de δ et prouver que δ est non dégénérée. Que peut-on dire de l'espace quadratique $(\mathsf{M}_2(K), \delta)$?

(3) Soit V l'orthogonal de I_2 (matrice identité) pour δ. Montrer que l'espace quadratique $(V, \delta_{|V})$ est isométrique à l'espace de Lorentz $\mathcal{L} = \langle 1, -1, 1\rangle$.
(4) Prouver que $X \in V \Leftrightarrow \mathsf{Tr}(X) = 0$.
(5) En déduire la relation $X^2 = \delta(X)\,\mathsf{I}_2$ pour tout $X \in V$.
(6) Prouver que deux éléments X et Y de V sont orthogonaux pour δ si et seulement si $XY + YX = 0$.
(7) On rappelle que le groupe $\mathsf{GL}_2(K)$ agit sur $\mathsf{M}_2(K)$ par conjugaison. Prouver que V est stable par cette action et que celle-ci définit un morphisme de groupes

$$\Phi\colon\ \mathsf{GL}_2(K) \to \mathsf{O}(V, \delta_{|V})$$

(avec $\Phi(A)\cdot X = AXA^{-1}$ pour $(A, X) \in \mathsf{GL}_2(K) \times V$).
(8) Si $A \in \mathsf{GL}_2(K) \cap V$, vérifier que $\Phi(A)$ est le renversement d'axe KA.
(9) En déduire que l'image de Φ contient $\mathsf{SO}(V, \delta_{|V})$.
(10) Prouver par l'absurde que $-\,\mathsf{Id}_V \notin \mathsf{Im}(\Phi)$, et en déduire que $\mathsf{Im}(\Phi) = \mathsf{SO}(V, \delta_{|V})$.
(11) Donner (sans démonstration) le centre de l'algèbre $\mathsf{M}_2(K)$; déterminer $\mathsf{Ker}(\Phi)$.
(12) Conclure que le groupe $\mathsf{SO}(\mathcal{L})$ est isomorphe à $\mathsf{PGL}_2(K)$.
(13) Si $K = \mathbf{F}_q$, calculer $\#\mathsf{O}(\mathcal{L})$.

Exercice 4

Soit K un corps fini d'ordre q. Si (V, Q) est un espace quadratique non dégénéré et $\alpha \in K$, on pose

$$r(V, \alpha) = \#\{x \in V,\ Q(x) = \alpha\}$$

Le but de ce problème est de calculer cet entier.
(1) Supposons que V est un plan hyperbolique. Montrer que

$$r(V, \alpha) = \begin{cases} 2q - 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ q - 1 & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

(2) Supposons $\dim_K(V) = 2k$ paire. Montrer que si $\alpha \in K^\times$, les formes quadratiques Q et αQ ont même discriminant, et en déduire que $r(V, \alpha) = r(V, 1)$, puis que

$$r(V, \alpha) = \tfrac{1}{q-1}(q^{2k} - r(V, 0))$$

(3) On suppose (V, Q) hyperbolique de dimension $2k$. Montrer par récurrence sur k que

$$r(V, \alpha) = \begin{cases} q^{k-1}(q^k + q - 1) & \text{si } \alpha = 0 \\ q^{k-1}(q^k - 1) & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

(4) On suppose que (V, Q) est de dimension $2k$, mais pas hyperbolique. Montrer par récurrence sur k que

$$r(V, \alpha) = \begin{cases} q^{k-1}(q^k - q + 1) & \text{si } \alpha = 0 \\ q^{k-1}(q^k + 1) & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

(5) Supposons désormais que (V, Q) est de dimension $2k+1$: écrivons $V = \langle \varepsilon \rangle \oplus H$ avec H hyperbolique de dimension $2k$ et $\varepsilon \in K^\times$. Montrer que

$$r(V, \alpha) = \begin{cases} q^{2k} & \text{si } \alpha = 0 \\ q^{2k} + q^k & \text{si } \alpha \in \varepsilon K^{\times 2} \\ q^{2k} - q^k & \text{si } \alpha \notin \varepsilon K^{\times 2} \end{cases}$$